



微分流形笔记

作者：吕浩哲 (Lucas Shen)

时间：July 13, 2025

封面：<https://www.pixiv.net/artworks/100631860>

悟已往之不谏，知来者之可追。——陶渊明

目录

第 1 章 光滑流形	1
1.1 光滑流形的定义	1
1.1.1 拓扑流形	1
1.1.2 相容坐标卡与光滑结构	1
1.2 流形上的光滑映射	3
1.2.1 光滑映射的定义	3
1.2.2 偏导数	4
1.3 流形上的单位分解	6
1.3.1 鼓包函数的存在性	6
1.3.2 单位分解	7
1.3.3 单位分解的应用	8
第 2 章 切空间与微分	11
2.1 光滑映射的微分	11
2.1.1 切空间	11
2.1.2 光滑映射的微分	13
2.1.3 流形上的光滑曲线	14
2.2 光滑函数的局部性态	16
2.2.1 反函数定理	16
2.2.2 淹没、浸入与常秩定理	16
2.3 正则值与 Sard 定理	18
2.3.1 临界点与正则点	18
2.3.2 Sard 定理	19
2.4 光滑子流形	20
2.4.1 光滑子流形	20
2.4.2 作为原像与像集的光滑子流形	22
2.5 Sard 定理的应用	25
2.5.1 Whitney 逼近定理	25
2.5.2 横截性	28
第 3 章 光滑向量场	32
3.1 向量丛	32
3.2 流形上的切丛	36
3.3 光滑向量场	37
3.4 积分曲线	39
3.4.1 局部坐标卡中的常微分方程组	40
3.4.2 向量场的完备性	41
3.4.3 流映射	42
3.5 向量场的李代数结构	43
3.5.1 向量场的李括号	43
3.5.2 向量场的推出	44
3.5.3 李导数	45

第 4 章 李群与李代数	47
4.1 李群	47
4.2 李代数	49
4.3 李群的李代数	50
4.4 指数映射	52
4.5 子群与子代数的关系	58
4.6 李基本定理	63
4.7 李群上的覆盖	63
4.8 李群上的微积分	64
第 5 章 流形上的微积分	67
5.1 余切空间与余切丛	67
5.1.1 对偶映射: 1-形式的拉回	69
5.1.2 1-形式在浸入子流形上的限制	70
5.2 流形上的微分形式	70
5.2.1 微分 k -形式	71
5.2.2 外微分	73
5.3 流形上的积分	75
5.3.1 定向	75
5.3.2 流形上的积分	78
5.4 带边流形与 Stokes 公式	78
5.4.1 带边流形	79
5.4.2 带边流形的定向	80
5.4.3 Stokes 公式	81
第 6 章 De Rham 理论	84
6.1 de Rham 上同调	84
6.1.1 de Rham 上同调群	84
6.1.2 同伦不变性	86
6.2 Mayer-Vietoris 序列	89
6.2.1 Mayer-Vietoris 序列	89
6.2.2 一些应用	90
6.3 紧支集 de Rham 上同调	92
6.3.1 最高阶 de Rham 上同调群	96
6.3.2 映射度	97
6.3.3 Poincare 对偶	98
6.4 Thom 类	99
附录 A 补充内容	105
A.1 借商拓扑构造流形	105
A.2 Whitney 嵌入定理	106
A.3 张量相关	108
A.4 上链复形	111

第 1 章 光滑流形

1.1 光滑流形的定义

1.1.1 拓扑流形

定义 1.1 (局部欧氏空间 (locally Euclidean))

称拓扑空间 M 是 n 维局部欧的, 若对任意 $p \in M$, 存在同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的邻域 U , 设 $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为同胚, 则 (U, ϕ) 称为 p 处的一个坐标卡, U 为坐标邻域, ϕ 为坐标映射.

注

- 若设 $\phi = (x^1, \dots, x^n), x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$, 则坐标卡也可表示为 $(U, x^1, \dots, x^n)$; 一点处的坐标卡也称为该点处的局部坐标系.
- 有时也会称 (ϕ, U, V) 为一个坐标卡, 其中 $\phi: U \rightarrow V$ 为同胚, V 为欧氏空间中的一个开集, 这两种定义是等价的.

借助下述定理, 可以证明对于连通局部欧空间, 其维数是良定的.

定理 1.1 (Brouwer 维数不变定理)

$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ 当且仅当 $n = m$.

定义 1.2 (拓扑流形)

称一个 T_2 、 A_2 的 n 维局部欧空间为 n 维拓扑流形 (简称 n 维流形).

注 容易验证, 拓扑流形具有如下非常好的性质:

- $T_1/T_3/T_4/A_1$.
- 可分: 具有可数稠密子集.
- Lindelof: 任意开覆盖都有可数子覆盖.
- 局部紧: 任意点都有开邻域, 其闭包为紧集.
- 局部连通: 任意点的邻域都有包含该点的连通过子集.
- 局部道路连通: 任意点的邻域都有包含该点的道路连通过子集.
- 仿紧: 任意开覆盖有局部有限开加细.
- 可度量化: 存在度量结构使得诱导拓扑一致.
- σ -紧: 可写成可数个紧集的并.

例 1.1

- 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 就是 n 维流形, 它有全局坐标卡 $(\mathbb{R}^n, \text{Id})$. 进一步 $\mathbb{R}^n$ 中的任何开集也是 n 维流形.
- 曲面是二维流形, 曲线是一维流形.
- 拓扑流形的乘积也是拓扑流形.

1.1.2 相容坐标卡与光滑结构

为了定义拓扑流形上的光滑结构, 首先需要刻画坐标卡之间的相容关系.

定义 1.3 (C^∞ -相容)

设 $(U, \phi), (V, \psi)$ 是局部欧空间 M 的两个坐标卡, 定义转移映射

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V), \quad \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

若转移映射均是光滑的, 则称两个坐标卡 C^∞ -相容的.

**注**

1. 大多时候会直接称坐标卡“相容”.
2. 对于坐标卡 $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$, 一般会记 $U_{ij} = U_i \cap U_j$, 转移映射 $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$.

定义 1.4 (C^∞ -图册与等价关系)

- 称 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 为局部欧空间 M 的 C^∞ -图册, 若 $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ 且 $\mathcal{U}$ 中坐标卡两两 C^∞ -相容.
- 称两个图册 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 等价, 若 $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ 也是 M 的图册.



注 大多时候会简称“图册”.

下面的引理说明, 上述定义确实是一个等价关系.

引理 1.1

设 $\mathcal{U}$ 为 M 的图册, 若 M 中的坐标卡 $(V, \psi), (W, \sigma)$ 都与 $\mathcal{U}$ 相容, 则其二者相容.



证明 只需证明对任意 $p \in V \cap W$, $\psi \circ \sigma^{-1} : \sigma(V \cap W) \rightarrow \psi(W \cap V)$ 在 p 处光滑. 任取 p 处的一个坐标卡 $(U, \phi) \in \mathcal{U}$, 根据相容性可知有光滑映射

$$\psi \circ \sigma^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \sigma^{-1}) : \sigma(U \cap V \cap W) \rightarrow \phi(U \cap V \cap W) \rightarrow \psi(U \cap V \cap W),$$

故 $\psi \circ \sigma^{-1}$ 在 p 处光滑, 进而 $\psi \circ \sigma^{-1}$ 光滑, 同理可证 $\sigma \circ \psi^{-1}$ 光滑.

定义 1.5 (光滑结构与光滑流形)

在拓扑流形 M 中, 称图册的等价类为一个微分结构, 赋予了微分结构的拓扑流形称为光滑流形.

**注**

1. 后文中“流形”一般指光滑流形.
2. 微分结构也可以视为“极大图册”, 即不真包含于任何更大的图册, 对于一个图册 $\mathcal{U}$, 添加所有与之相容的坐标卡后即可得到一个极大图册, 因此证明拓扑空间 M 是光滑流形时, 只需证明
 - (a). M 是 T_2+A_2 的.
 - (b). M 有一个光滑图册.
3. 当后面讨论光滑流形时, 默认已经指定了一个光滑结构.

下面的例子说明, 赋予不同光滑结构, 可以得到不同的光滑流形.

例 1.2 不等价的图册 考虑 $\mathbb{R}$ 的三个图册 $\mathcal{U}_i = \{(\mathbb{R}, \phi_i)\}$, 其中

$$\phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = 2x, \quad \phi_3(x) = x^3,$$

则 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ 等价, 但 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_3$ 不等价, 因为 $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(x) = x^{1/3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不光滑.

单坐标卡流形

根据定义立得

命题 1.1

若拓扑流形 M 可被单独一个坐标卡覆盖 (即全局坐标卡), 则这个坐标卡自动给出了 M 上的一个光滑结构.



例 1.3

- 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是单坐标卡流形.
- 一般线性群 $GL_n(\mathbb{R})$ 是单坐标卡流形.
- 对于开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 以及连续映射 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义其图像

$$\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in U, y = f(x)\},$$

则 $\Gamma(f)$ (赋予 $\mathbb{R}^{m+n}$ 的子空间拓扑) 有全局坐标卡 $(\Gamma(f), \phi)$, 其中 (这里将坐标卡的定义进行了适当拓展, 与一开始的定义不矛盾)

$$\phi: \Gamma(f) \rightarrow U, \quad (x, y) \mapsto x,$$

由此可以看出, 如果取连续但不光滑的映射, 可以得到与欧氏空间中常规光滑结构不同的结构, 后面将看到, 图不一定是光滑子流形.

1.2 流形上的光滑映射

1.2.1 光滑映射的定义

借助流形上的光滑结构, 可以定义其上的光滑映射, 其思想在于借助局部欧性质, 将映射拉入欧氏空间考虑.

定义 1.6 (流形上的光滑函数)

设 M 为光滑流形, 称 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in M$ 处光滑, 若存在 p 附近的坐标卡 (U, ϕ) 使得 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 处光滑. 若 f 在每一点均光滑, 则称之在 M 上光滑.



注 对 p 附近的其它坐标卡 (V, ψ) 有 $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$, 光滑结构中坐标卡的相容性保证了函数光滑性是良定的.

使用相同的思路, 可以定义流形之间的光滑映射.

定义 1.7 (流形间的光滑映射)

设 M, N 为光滑流形, 称连续映射 $f: N \rightarrow M$ 在 $p \in N$ 处光滑, 若存在 $p, f(p)$ 处的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 处光滑. 若 f 在每一点均光滑, 则称之在 N 上光滑.



注 类似地, 易证流形间光滑映射也是良定的.

由定义, 映射光滑性是由每一点光滑性描述的, 但许多时候映射与坐标映射复合的光滑性是易得的, 借助一些坐标卡可以直接得到整体的光滑性, 不必再逐点考虑.

命题 1.2

设 M, N 为光滑流形, $f: N \rightarrow M$ 为连续映射, 则下述等价:

1. f 在 N 上光滑.
2. 存在 N 的图册 $\mathcal{U}$, M 的图册 $\mathcal{V}$ 使得对任意 $(U, \phi) \in \mathcal{U}, (V, \psi) \in \mathcal{V}$, 有光滑映射

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

3. 对 N, M 中的任意坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 都有光滑映射

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$



命题 1.3 (光滑映射的复合)

设 M, N, P 为光滑流形, $f: N \rightarrow M, g: M \rightarrow P$ 为光滑映射, 则 $g \circ f: N \rightarrow P$ 也是光滑映射.



定义 1.8 (微分同胚)

设 N, M 为光滑流形, 连续映射 $f: N \rightarrow M$, 若 f 为同胚, f, f^{-1} 均光滑, 则称之为 N, M 间的一个微分同胚.

容易验证如下事实:

命题 1.4 (坐标映射与微分同胚)

- 若 (U, ϕ) 为 n 维光滑流形 M 的一个坐标卡, 则坐标映射 $\phi: U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 为微分同胚.
- 若 U 为 n 维光滑流形 M 中的开集, $F: U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ 为微分同胚, 则 (U, F) 为 M 的一个坐标卡.

证明

1. 由定义可得 ϕ 为同胚, 只需证明 ϕ, ϕ^{-1} 均为同胚, 考虑单坐标卡 $\{(U, \phi)\}, \{(\phi(U), \text{Id})\}$ 即可.
2. 任取 M (光滑结构中) 的坐标卡 (U_α, ϕ_α) , $F \circ \phi_\alpha^{-1}, \phi_\alpha \circ F^{-1}$ 都光滑, 因此 (U, F) 与光滑结构中的坐标卡均相容, 根据极大性可知 (U, F) 为坐标卡.

欧氏空间间连续映射的光滑性可以由各分量刻画, 流形也有这样的性质.

命题 1.5 (借分量刻画光滑性)

设 $F: N \rightarrow M$ 为 n, m 维光滑流形间的连续映射, 则下述等价:

1. F 在 N 上连续.
2. 存在 M 的图册 $\mathcal{V}$, 使得对任意 $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m) \in \mathcal{V}$, 每个分量 $y^i \circ F: F^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ 都是光滑函数.
3. 对 M 的任意坐标卡 $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$, 每个分量 $y^i \circ F: F^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ 都是光滑函数.

1.2.2 偏导数

借助“在欧氏空间处理”的观点, 可以定义出流形间函数的偏导数.

定义 1.9 (流形上光滑函数的偏导数)

设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为光滑映射. 对于 $p \in M$ 以及该点的坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, 定义 f 在该点处 (关于这一坐标卡) 的偏导数为

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)) = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}), \quad (1.1)$$

其中 $r^1, \dots, r^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准坐标, 即 $x^i = r^i \circ \phi$.

注 对于函数 f 以及坐标卡 (U, ϕ) , 关于该坐标卡的偏导数可以看作 U 上的一个函数, 根据定义可知其关于 ϕ 的拉回为

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \phi^{-1} = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i},$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 也是光滑函数.

对于流形上的坐标函数本身, 其偏导数与欧氏空间中标准坐标有类似的性质.

命题 1.6

设 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 为流形 M 上的坐标卡, 则 $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$.

证明 对任意 $p \in U$ 有

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial (x^i \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial (r^i \circ \phi \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\phi(p)) = \delta_{ij}.$$

对于流形间的光滑映射，也有类似的定义。

定义 1.10 (流形间光滑映射的偏导数 (Jacobian))

设 $F: N \rightarrow M$ 为光滑映射, $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n), (V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$ 为 N, M 的坐标卡, 使得 $F(U) \subset V$, 记

$$F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F: U \rightarrow \mathbb{R},$$

称矩阵 $J(\psi \circ F \circ \phi^{-1}) := (\partial_{x^j} F^i)_{m \times n}$ 为映射 F 关于两组坐标卡的 **Jacobi 矩阵**, 当 $N = M$ 时, $\det(J(\psi \circ F \circ \phi^{-1}))$ 称为 F 关于两组坐标卡的 **Jacobi 行列式**.



注 若给定坐标卡, 则可简记为 $J(F)$.

例 1.4 转移映射的 Jacobian 设 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n), (V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ 为 M 上的两个坐标卡, 则转移映射 $\psi \circ \phi^{-1}$ 的偏导数为

$$\frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial(r^i \circ \psi \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial(y^i \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p),$$

因此 $J(\psi \circ \phi^{-1}) = (\partial_{y^i} x^j)_{n \times n}$.

反函数定理

进一步, 欧氏空间中的反函数定理可以“移植”到流形上.

定义 1.11 (局部微分同胚)

设 $f: N \rightarrow M$ 为光滑映射, 若对于 $p \in M$, 存在开邻域 U 以及 $f(p)$ 的开邻域 V 使得 $f|_U: U \rightarrow V$ 为微分同胚, 则称 f 为 p 处的局部微分同胚.



定理 1.2 (欧氏空间中的反函数定理)

设 $F: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为光滑函数, W 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则 F 在 $p \in W$ 处为局部微分同胚当且仅当 $\det(J(F))(p) \neq 0$.



定理 1.3 (流形上的反函数定理)

设 $F: N \rightarrow M$ 为同维流形之间的光滑映射, $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n), (V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ 为 $p, F(p)$ 处的坐标卡, 满足 $F(U) \subset V$, 则 F 在 p 处为局部微分同胚当且仅当 F 在两组坐标卡下的 **Jacobi 行列式** 在 p 处非零.



证明 设 $F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F$, 则偏导数为

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial(r^i \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial r^j}(\phi(p)),$$

因此 F 的 **Jacobi 矩阵** 等于 $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ 的 **Jacobi 矩阵**, F 在 p 处为局部微分同胚当且仅当 $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 处为局部微分同胚, 当且仅当

$$\det(J(F))(p) = \det(J(\psi \circ F \circ \phi^{-1}))(\phi(p)) \neq 0,$$

得证.

推论 1.1

设 N 为 n 维流形, $(U, x^1, \dots, x^n)$ 上的一组光滑函数 $F^1, \dots, F^n$ 构成 p 处一个局部坐标系当且仅当 $\det(J(F))(p) \neq 0$.



证明 设 $F = (F^1, \dots, F^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则 $\det(J(F))(p) \neq 0$ 当且仅当 F 为局部微分同胚, 即存在 p 的开邻域 W

使得 $F: W \rightarrow F(W)$ 为局部微分同胚, 此时 (W, F) 即为 p 处的一个坐标卡, 反之亦然.

1.3 流形上的单位分解

(光滑) 单位分解是流形上最重要的工具, 它可以将局部行为统合到整体.

1.3.1 鼓包函数的存在性

定义 1.12 (流形上的鼓包函数)

设 M 为拓扑流形, $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数. 称之为在 (邻域) U 中的 $p \in M$ 处的鼓包函数, 若其满足

- f 非负.
- $\text{supp } \rho \subset U$.
- 存在 p 的邻域 V , 使得 $\rho|_V \equiv 1$.



注 一般简称 “ p 处的鼓包函数”; 有时会要求 $\text{supp } \rho$ 为紧集.

欧氏空间中的鼓包函数是较好构造的.

例 1.5 欧氏空间中的鼓包函数 首先考虑 $\mathbb{R}$ 中函数

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_1(1-x)}$$

其中 f_1 在负半轴恒为 0, 在正半轴单增收敛到 1; f_2 在 $x \leq 0$ 时恒为 0, 在 $x \geq 1$ 时恒为 1. 借此定义

$$f_3(x) = f_2(2 - |x|),$$

则 f_3 即为 $\mathbb{R}^n$ 中原点处的鼓包函数, 它在 $B_1(0)$ 上取 1, 在 $B_2(0)$ 外取 0.

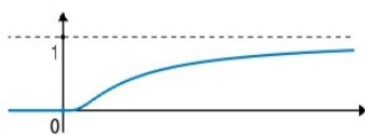


图 1.6: f_1 的图像

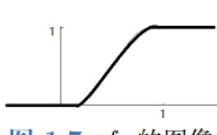


图 1.7: f_2 的图像

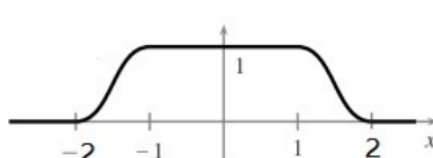


图 1.8: f_3 的图像

图 1.1: 鼓包函数图像

容易发现, 上面构造出的鼓包函数是光滑的, 由于我们大多时候在光滑流形上处理问题, 因此自然希望得到光滑鼓包函数. 借助欧氏空间中的鼓包函数, 可以构造出给定紧集中的光滑鼓包函数.

定理 1.4 (紧支集光滑鼓包函数的存在性)

设 M 为光滑流形, K 为紧集, U 为包含 K 的开集, 则存在紧支集光滑鼓包函数 ρ 满足

$$\rho|_K \equiv 1, \quad \text{supp } \rho \subset U.$$



证明 对任意 $q \in K$, 存在坐标卡 (U_q, ϕ_q) 使得 $U_q \subset U, \phi_q(q) = 0$, 设函数

$$f_q(p) = \begin{cases} f_3(\phi_q(p)), & p \in U_q \\ 0, & p \notin U_q \end{cases}$$

若令 $\tilde{U}_q = \phi_q^{-1}(B_1(0))$, 则 $f_q|_{\phi_q^{-1}(B_1(0))} \equiv 1$, 并且

- $f_q \in C^\infty(M)$: 注意到它分别在 M 的开覆盖 $\{U_q, \phi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})^c\}$ 上均光滑, 由粘接引理可得.
- $\text{supp } f_q \subset U_q$ 且为紧集: 显然 $\text{supp } f_q \subset U_q$, 注意到 $\text{supp } f_q = \phi_q^{-1}(\overline{B_2(0)})$ (可证明其补集相同).

所有 $\{U_q : q \in K\}$ 构成 K 的开覆盖, 因此可取有限子覆盖 $\{U_{q_1}, \dots, U_{q_N}\}$, 令 $\psi = \sum_{i=1}^N f_{q_i}$, 则

$$\psi \in C_0^\infty(M), \quad \text{supp } \psi \subset U, \quad \varphi|_K \geq 1,$$

取 $\rho = f_2 \circ \psi$, 则 ρ 即为满足要求的鼓包函数.

借助光滑鼓包函数, 可以将局部定义的光滑函数的一部分“延拓”到整体.

推论 1.2 (光滑函数的局部延拓)

设 M 为光滑流形, $U \subset M$ 为开集, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 则对任意 $q \in U$, 存在 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ 以及 p 的邻域 V 使得 $\tilde{f}|_V = f|_V$.



证明 取 p 的开邻域 V 使得 $\bar{V}$ 为紧集, 并且 $p \in \bar{V} \subset U$ (流形是局部紧的), 设 ρ 为 p 处支在 U 中的鼓包函数, 使得 $\rho|_{\bar{V}} \equiv 1$, 定义

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x), & x \in U, \\ 0, & x \notin U, \end{cases}$$

则 $\tilde{f}|_V = f|_V$, 并且 $\tilde{f}$ 在 M 的开覆盖 $\{U, (\text{supp } f)^c\}$ 上均光滑, 故由粘接引理可得 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$.

1.3.2 单位分解

定义 1.13 (光滑单位分解)

设 M 为光滑流形, $\{U_\alpha\}$ 为其开覆盖, $\{\rho_\alpha\}$ 为 M 上的一族光滑函数, 若其满足

- 每个 α 都是支在 U_α 内的光滑鼓包函数.
- 对任意 $p \in M$, 存在一个只与有限个 U_α 相交的邻域.
- 对任意 $p \in M$, $\sum_\alpha \rho_\alpha(p) = 1$.

则称 $\{\rho_\alpha\}$ 为一个从属于 $\{U_\alpha\}$ 的光滑单位分解.



注

1. 由于流形是 A2 的, 因此定义中的开覆盖可以替换为可数开覆盖.
2. 虽然 $\sum_\alpha \rho_\alpha(p)$ 是函数的无穷求和, 但局部有限性使得它在每一点附近都是一个有限求和.
3. 后面默认“单位分解”为“光滑单位分解”.

定理 1.5 (单位分解的存在性)

对于任意光滑流形 M 及其开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 存在一个从属之的单位分解 $\{\rho_\alpha\}$.



注 定理的证明依赖技术性引理 1.3, 我们先用该引理证明单位分解的存在性, 最后再处理细节问题.

证明 设 $\{U_\alpha\}$ 为 M 的开覆盖, 取满足引理 1.3 的两族可数开覆盖 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$, 由于 $\bar{V}_j \subset W_j$ 且为紧集, 因此存在鼓包函数 $\varphi_j \in C_0^\infty(M)$ 满足

$$\varphi_j|_{\bar{V}_j} \equiv 1, \quad \text{supp } \varphi_j \subset W_j,$$

由于 $\mathcal{W}$ 为局部有限覆盖, 因此 $\varphi = \sum_j \varphi_j$ 是良定的光滑正函数, 作归一化

$$\psi_j = \frac{\varphi_j}{\varphi} \in C^\infty(M), \quad \sum_j \psi_j \equiv 1,$$

对任意 j , 固定一个指标 $\alpha(j)$ 使得 $W_j \subset U_{\alpha(j)}$, 再将 ψ_j 的和进行重分配

$$\rho_\alpha = \sum_{j: \alpha(j)=\alpha} \psi_j \in C^\infty(M),$$

由 $\mathcal{W}$ 的局部有限性可得 (第一个等号直接证明, 第二个是因为“局部有限集族并集的闭包等于其闭包的并”)

$$\text{supp } \rho_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha(j)=\alpha} \text{supp } \psi_j} = \bigcup_{\alpha(j)=\alpha} \overline{\text{supp } \psi_j} = \bigcup_{\alpha(j)=\alpha} \text{supp } \psi_j \subset U_\alpha,$$

因此 $\{\rho_\alpha\}$ 为从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.

注 特别地, 当覆盖有限时, 每个 ρ_α 都有紧支集.

技术性的引理

引理 1.2 (穷竭的存在性)

对任意拓扑流形 M , 存在可数开集族 $\{X_i\}$ 使得

1. 每个 $\overline{X_j}$ 为紧集.
2. $\overline{X_j} \subset X_{j+1}$.
3. $M = \bigcup_j X_j$.



注 这样的子集族称为 M 的一个**穷竭**.

证明 M 存在可数拓扑基, 从中选择那些闭包是紧集的开集 (拓扑流形局部紧, 因此这样的集合存在且足够多), 记为 $Y_1, Y_2, \dots$, 则 $\{Y_j\}$ 是 M 的开覆盖, 令 $X_1 = Y_1$, 由于 $\{Y_j\}$ 是紧集 $\overline{X_1}$ 的开覆盖, 因此存在有限子覆盖 $\{Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k}\}$, 令

$$X_2 = Y_2 \cup Y_{i_1} \cup \dots \cup Y_{i_k},$$

则 $\overline{X_1} \subset X_2$ 且 $\overline{X_2}$ 紧致, 重复这一过程可得满足条件的穷竭 $\{X_n\}$ (由于 $X_k \supset \bigcup_{j=1}^k Y_j$, 因此也满足第三条). 最后证明所需引理

引理 1.3 (两族加细覆盖)

对拓扑流形 M 的任意开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, 存在 M 的两组可数开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_j\}, \mathcal{W} = \{W_j\}$ 使得

1. 对任意 j , $\overline{V_j}$ 为紧集且 $\overline{V_j} \subset W_j$.
2. $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个加细, 即对任意 j , 存在 $\alpha = \alpha(j)$ 使得 $W_j \subset U_\alpha$.
3. $\mathcal{W}$ 局部有限: 对任意 $p \in M$, 存在邻域 W_p 使得仅有限个 W_j 满足 $W_p \cap W_j \neq \emptyset$.



证明 设 $\{X_i\}$ 为 M 的穷竭, 对任意 $p \in M$, 存在 $j, \alpha(p)$ 使得 $p \in (\overline{X_{j+1}} \setminus X_j) \cap U_{\alpha(p)}$, 并且可取 p 的开邻域 V_p, W_p 使得 $\overline{V_p}$ 紧且

$$\overline{V_p} \subset W_p \subset U_{\alpha(p)} \cap (X_{j+2} \setminus \overline{X_{j-1}}).$$

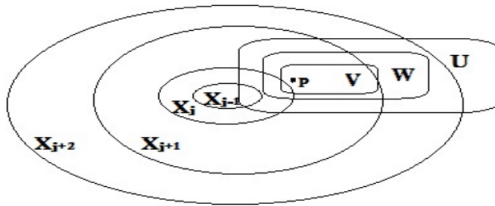


图 1.2: 关系示意图

由于每个 $\overline{X_{j+1}} \setminus X_j$ 是紧致的, 因此可取有限个点 $p_1^j, \dots, p_{k_j}^j$ 使得 $\{V_{p_1^j}, \dots, V_{p_{k_j}^j}\}$ 是 $\overline{X_{j+1}} \setminus X_j$ 的开覆盖, 将全体 $V_{p_k^j}, W_{p_k^j}$ 重标号为 $V_1, V_2, \dots; W_1, W_2, \dots$, 则 $\mathcal{V} = \{V_j\}, \mathcal{W} = \{W_j\}$ 满足条件 (其中局部有限性是因为仅有限多个 W_k 与 $X_{j+1} \setminus \overline{X_{j-1}}$ 相交, 这有限个分别对应前文中的 $j-2, j-1, j, j+1$).

1.3.3 单位分解的应用

借助单位分解, 可以将特定鼓包函数的存在性从紧集推广到闭集上.

推论 1.3 (特定鼓包函数的存在性)

设 M 为光滑流形, K 为闭集, U 为包含 K 的开集, 则存在紧支集光滑鼓包函数 ρ 满足

$$\rho|_K \equiv 1, \quad \text{supp } \rho \subset U.$$



证明 M 有开覆盖 $\{U, M \setminus K\}$, 设 $\{\rho_1, \rho_2\}$ 为对应的单位分解, 令 $\varphi = \rho_1$ 则

$$\varphi \in C_0^\infty(M), \quad \text{supp } \varphi \subset U,$$

并且 $\rho_2|_K \equiv 0$ 说明 $\varphi|_K \equiv 1$.

注 这里 $\text{supp } \varphi$ 紧是因为该覆盖有限.

¶ 流形上的 Urysohn 引理

根据上述推论可以直接得到光滑 Urysohn 引理 (注意拓扑流形是 T_4 的).

定理 1.6 (光滑 Urysohn 引理)

对于光滑流形 M 的任意无交闭集 A, B , 存在光滑函数 $f: M \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(A) = 0, f(B) = 1$.



证明

定理 1.7 (强光滑 Urysohn 引理)

对于光滑流形 M 的任意无交闭集 A, B , 存在光滑函数 $f: M \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f^{-1}(0) = A, f^{-1}(1) = B$.



证明

¶ 流形上函数的逼近**定理 1.8 (Whitney 逼近定理)**

设 M 为光滑流形, 则对任意 $g \in C(M)$ 以及恒正连续函数 $\delta \in C(M, \mathbb{R}_{>0})$, 存在 $f \in C^\infty(M)$ 使得对所有 $p \in M$ 有

$$|f(p) - g(p)| < \delta(p).$$

**定义 1.14 (子集上的光滑性)**

设 M 为光滑流形, g 为其上的函数, $A \subset M$, 若存在开集 U 以及 U 上的光滑函数 g_0 满足 $A \subset U, g_0|_A = g$, 则称 g 在子集 A 上光滑.



注 注意, 任意函数在单点集 $\{p\}$ 上光滑, 但未必在 p 处光滑.

借此定义可以证明 Whitney 定理的更强版本 (Whitney 定理是下面 $A = \emptyset$ 时的特例), 其证明思路是在局部用常值函数逼近, 再利用单位分解进行“粘合”.

定理 1.9 (光滑函数逼近连续函数)

设 M 为光滑流形, A 为闭子集, 则对任意在 A 上光滑的连续函数 $g \in C(M)$ 以及任意恒正连续函数 $\delta \in C(M, \mathbb{R}_{>0})$, 存在 $f \in C^\infty(M)$ 使得

1. 对任意 $p \in A$ 有 $f(p) = g(p)$.
2. 对任意 $p \in M$ 有 $|f(p) - g(p)| < \delta(p)$.



注 定理容易推广到连续映射 $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的情形.

证明 根据定义, 存在开集 $U \supset A$ 以及 $g_0 \in C^\infty(U)$ 使得 $g_0|_A = g$, 令 $U_0 = \{p \in U : |g_0(p) - g(p)| < \delta(p)\}$, 则 U_0 为包含 A 的开集. 对任意 $q \in A^c$, 令

$$U_q = \{p \in A^c : |g(p) - g(q)| < \delta(p)\}, \quad (1.2)$$

则 $\{U_q : q \in A^c\}$ 是 A^c 的开覆盖, 它有可数开覆盖 $\{U_i\}$, 设 $\{\rho_0, \rho_i : i \in \mathbb{N}\}$ 为从属于 $\{U_0, U_i : i \in \mathbb{N}\}$ 的单位分解, 定义

$$f(p) = \rho_0(p)g_0(p) + \sum_{i \geq 1} \rho_i(p)g(q_i) \in C^\infty(M),$$

则对任意 $p \in M$ 有

$$\begin{aligned} |f(p) - g(p)| &= \left| \rho_0(p)g_0(p) + \sum_{i \geq 1} \rho_i(p)g(q_i) - \sum_{i \geq 0} \rho_i(p)g(p) \right| \\ &\leq \rho_0(p)|g_0(p) - g(p)| + \sum_{i \geq 1} \rho_i(p)|g(q_i) - g(p)| \\ &< \rho_0(p)\delta(p) + \sum_{i \geq 1} \rho_i(p)\delta(p) \\ &= \delta(p). \end{aligned}$$

其中最后的不等式 $\rho_0(p)|g_0(p) - g(p)| < \rho_0(p)\delta(p)$ 由如下事实得到:

- 若 $p \in U_0$ 则由定义有 $|g_0(p) - g(p)| < \delta(p)$.
- 若 $p \notin U_0$ 则 $\rho_0(p) = 0$,

因此这些不等式至少有一个严格成立, 得证.

上述定理也蕴含光滑的 Tietz 扩张定理.

定理 1.10 (光滑 Tietz 扩张定理)

设 A 为光滑流形 M 的闭子集, $f \in C^\infty(A)$, 则存在 $g \in C^\infty(M)$ 使得 $f = g|_A$.



证明 根据连续情形的 Tietz 扩张定理, 存在 $f_1 \in C(M)$ 使得 $f_1|_A = f$, 由上述定理即得 $g \in C^\infty(M)$, $g|_A = f_1|_A = f$.

第2章 切空间与微分

2.1 光滑映射的微分

2.1.1 切空间

在欧氏空间中, 光滑映射 $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ 在一点处的**微分**为线性映射 $df_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 它在标准基下的矩阵为 $(\partial_{x^j} f_i)_{m \times n}$. 微分也是 f 的一种线性化, 即在 a 处有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - (df_a)(x - a)|}{|x - a|} = 0.$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 点 a 处的切空间被定义为从该点出发的向量的全体, 即 $\{a\} \times \mathbb{R}^n$, 只不过欧氏空间中向量可以任意平移, 因此许多时候会省略点 p . 因此, 微分 df_a 也可以看作切空间 $T_a U \cong \mathbb{R}^n$ 到 $T_{f(a)} V \cong \mathbb{R}^m$ 的线性映射, 它将 U 中 a 处的切向量映为 V 中 $f(a)$ 处对应的切向量.

在微分几何中, 设正则曲面的局部参数方程为 $f = (f_1, f_2, f_3)$, 则它在点 $p = f(u, v)$ 处的切空间实际上就是该点的切平面, 定义为 (其中 $M = \text{Im } f$)

$$T_p M = \text{Span}(f_u|_p, f_v|_p) = \text{Im } df_p.$$

类似地, 如果流形 M 可以通过 $\iota: M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ 嵌入到欧氏空间中, 可取 p 附近的坐标卡 (U, ϕ) , 仿照上面的结果定义

$$T_p M = \text{Im } d(\iota \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}.$$

但这种定义需要验证 $T_p M$ 不依赖坐标卡的选取, 并且对于不同嵌入可以得到相同的结果, 因此我们更希望切空间有直接的、内蕴的定义.

¶ 切向量与方向导数的对应

对任意 $\vec{v} \in T_a \mathbb{R}^n$, 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 沿 $\vec{v}$ 方向的导数为

$$D_{\vec{v}} f := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + t\vec{v}) = df_a(\vec{v}),$$

这就定义了一个算子, 若设 $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n)^T$, 则

$$D_{\vec{v}}: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

容易验证它是线性算子, 并且满足 a 处的 Leibnitz 法则:

$$D_{\vec{v}}(fg) = f(a)D_{\vec{v}}g + g(a)D_{\vec{v}}f.$$

一般将满足 Leibnitz 法则的线性算子称为**导子**.

定义 2.1 (导子)

若 A 为 k -代数, B 为 A 上的双模, 线性算子 $d: A \rightarrow B$ 满足 Leibnitz 法则

$$d(uv) = (du)v + u(dv),$$

则称 d 为 A 上的一个 (取值于 B 的) 导子.

注 容易验证, 所有导子也构成一个 k -线性空间; 方向导数就是 $\mathbb{R}$ -代数 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上一个取值于 $\mathbb{R}$ 的导子.

我们希望建立切向量与方向导数之间的对应 (或者说线性同构, 注意到方向导数的全体也构成线性空间)

$$\vec{v} \longleftrightarrow D_{\vec{v}}$$

从而将切空间的概念更好地推广到流形上, 下面的引理非常关键.

引理 2.1

若 $D: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ 为线性算子且满足 a 处的 Leibnitz 法则, 即

$$D(fg) = f(a)D(g) + g(a)D(f),$$

则存在切向量 $\vec{v} \in T_a \mathbb{R}^n$ 使得 $D = D_{\vec{v}}$.



证明 对任意 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(a + t(x-a)) dt \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(a + t(x-a)) dt \cdot (x^i - a^i) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) h_i(x). \end{aligned}$$

借助 Leibnitz 法则可得 $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1) \Rightarrow D(1) = 0$, 进而由线性性得到对任意常数 c 都有 $D(c) = 0$, 因此

$$D(f) = \sum_{i=1}^n D(x^i) h_i(a) = \sum_{i=1}^n D(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(a), \quad (2.1)$$

这就说明只要令 $\vec{v} = (D(x^1), \dots, D(x^n))^T \in T_a(\mathbb{R}^n)$ 就有

$$D = \sum_{i=1}^n D(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x=a} = D_{\vec{v}}^a. \quad (2.2)$$

推论 2.1 (导子与切向量的对应)

方向导数算子

$$D: T_a \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}_a, \quad \vec{v} \mapsto D_{\vec{v}}$$

是切空间与导子空间之间的线性空间同构.



注 切向量是几何对象, 而导子是代数对象, 这实际建立了几何对象与代数对象的对应.

证明 显然 D 是线性映射, 引理保证它是满射, 而对不同的切向量, 容易找到函数使得其在两个方向上导数不同, 因此 D 是单射.

例 2.1 按照上面的对应, $T_p \mathbb{R}^n$ 中的标准基 $e_1, \dots, e_n$ 分别对应到 $\partial_{x^1}|_p, \dots, \partial_{x^n}|_p$.

¶ 流形上的切空间

流形上虽然没有“几何向量”, 但它有 $\mathbb{R}$ -代数 $C^\infty(M)$, 因此可以定义一点的导子为该点的切向量.

定义 2.2 (流形上的切向量与切空间)

设 M 为 n 维光滑流形, 则

- 若 $\mathbb{R}$ -线性映射 $X_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in M$ 处满足 Leibnitz 法则

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p), \quad \forall f, g \in C^\infty(M), \quad (2.3)$$

则称 X_p 为 M 在 p 点处的一个切向量.

- 称 p 处全体切向量构成的线性空间 $T_p M$ 为 M 在 p 处的切空间.



引理 2.2

若 p 的某个邻域内有 $f = c$, 则 $X_p(f) = 0$.



证明 取 M 上的鼓包函数 φ 使得 φ 在 p 附近恒为 1, 在集合 $\{f \neq c\}$ 上恒为 0, 则 $(f - c)\varphi \equiv 0$, 因此

$$0 = X_p((f - c)\varphi) = (f(p) - c)X_p(\varphi) + X_p(f)\varphi(p) = X_p(f).$$

上述引理说明, 若在 p 的邻域内有 $f = g^1$, 则 $X_p(f) = X_p(g)$, 这说明切空间实际上是局部的, 因此有

命题 2.1

设 M 为光滑流形, U 为 $p \in M$ 的开邻域, 则有线性空间同构 $T_p M \cong T_p U$.

2.1.2 光滑映射的微分

对于欧氏空间的映射 $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, 其微分 $df_a: T_a U \rightarrow T_{f(a)} V$ 在 $\vec{v}$ 上的作用为

$$df_a(\vec{v}) = \left(\partial_{x^j} f_i(a) \right) \vec{v} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x^j}(a) v^j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x^j}(a) v^j \right)^T := \vec{w},$$

从导子的角度看, $\vec{w}$ 可视为 $f(a)$ 处的导子, 即 $df_a(D_{\vec{v}}) = D_{\vec{w}}$, 它将光滑函数 $g \in C^\infty(V)$ 映为

$$\sum_{j=1}^m w^j \frac{\partial g}{\partial y^j}(f(a)) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(a) v^i \frac{\partial g}{\partial y^j}(f(a)) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x=a} (g \circ f), \quad (2.4)$$

因此 $D_{\vec{v}} g = D_{\vec{w}}^a(g \circ f)$, 由此可定义

定义 2.3 (光滑映射的微分)

设光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 以及 $p \in M$, 定义 f 在 p 处的微分为线性映射 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, 满足

$$df_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f), \quad \forall X_p \in T_p M, g \in C^\infty(N).$$

注 考虑 $\mathbb{R}$ 的情形, 这时 $T_t \mathbb{R} = \{c \frac{d}{dt} : c \in \mathbb{R}\}$, 因此可以自然将 $T_t \mathbb{R}$ 等同于 $\mathbb{R}$:

$$c \frac{d}{dt} \in T_t \mathbb{R} \rightsquigarrow c \in \mathbb{R},$$

对任意 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ 有

$$df_p(c \frac{d}{dt})(g) = c \frac{d}{dt} \Big|_p (g \circ f) = c \frac{dg}{du}(f(p)) \frac{df}{dt}(p) = c \frac{d}{dt} \Big|_p (f) \frac{dg}{du}(f(p)),$$

由于 $\dim T_{f(t)} \mathbb{R} = 1$, 因此 $df_p(X_p)$ 仅由一个光滑函数的值就能确定, 取 $g(t) = t$, 则与 $c \frac{d}{dt}$ 对应的 $c \in \mathbb{R}$ 恰好是它在 g 上作用的结果, 即对任意 $f \in C^\infty(M)$, $X_p \in T_p M$ 有

$$df_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f) = X_p(f),$$

因此一般简记为 $df_p(X_p) = X_p(f)$.

从范畴角度而言, 微分实际上是“带点光滑流形范畴”到“线性空间范畴”的函子.

定理 2.1 (d 的函子性)

设 M, N, P 为光滑流形, $p \in M$, 则

1. $d(\text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_p M}$.
2. 链式法则: 设 $f \in C^\infty(M, N)$, $g \in C^\infty(N, P)$, 则 $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.

证明

1. $df_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f) = X_p(g)$, 因此 $df_p(X_p) = X_p$, 说明 $df_p = \text{Id}_{T_p M}$.

¹若在 p 的某个邻域内有 $f = g$, 则称它们在 p 处定义了相同的“芽”, 这可以看作 $C^\infty(M)$ 上的一种等价关系, 当研究局部性质时, 在芽上处理会更便利.

2. 对任意 $X_p \in T_p M, h \in C^\infty(P)$ 有

$$d(g \circ f)_p(X_p)(h) = X_p(h \circ g \circ f) = df_p(X_p)(h \circ g) = dg_{f(p)}(df_p(X_p))(h). \quad (2.5)$$

推论 2.2 (微分同胚 $\mapsto$ 线性同构)

若 $f: M \rightarrow N$ 为微分同胚, 则 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 为线性同构.



注 这蕴含了光滑流形的维数不变性.

证明 对 $f^{-1} \circ f = \text{Id}_M, f \circ f^{-1} = \text{Id}_N$ 使用链式法则可得.

进一步, 借助坐标映射可以给出切空间的细致刻画.

推论 2.3 (切空间的基与维数)

设 M 为 n 维流形, 则对 p 附近的任意坐标卡 (U, ϕ) 有

$$T_p M = \text{Span}(\partial_1, \dots, \partial_n), \quad (2.6)$$

其中 $\partial_i := d\phi_{\phi(p)}^{-1}(\partial_{r^i}|_{\phi(p)})$. 特别地, $\dim T_p M = n$.



证明 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为微分同胚说明 $d\varphi_p: T_p U \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ 为线性同构, 因此

$$T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n = \text{Span}(\partial_{r^1}|_{\varphi(p)}, \dots, \partial_{r^n}|_{\varphi(p)}) \Rightarrow T_p M = T_p U = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n) = \text{Span}(\partial_1, \dots, \partial_n).$$

借助坐标卡, ∂_i 可以具体表示为

$$\partial_i: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \partial_i(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)).$$

乘积流形的切空间

乘积流形的切空间有如下结论.

命题 2.2 (乘积流形的切空间)

设 M_1, M_2 为光滑流形, $M_1 \times M_2$ 为其乘积.

1. 投影映射 $\pi_1: M_1 \times M_2 \rightarrow M_1, \pi_2: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ 光滑.
2. “切片”嵌入 $i_b: M_1 \hookrightarrow M_1 \times M_2, x \mapsto (x, b)$ 和 $j_a: M_2 \hookrightarrow M_1 \times M_2, y \mapsto (a, y)$ 光滑.
3. 有向量空间同构 $T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$.



2.1.3 流形上的光滑曲线

定义 2.4 (光滑曲线)

流形 M 上的一条光滑曲线定义为光滑映射 $\gamma: (a, b) \rightarrow M$.



注 一般设 $0 \in (a, b)$, 称 γ 以 $p = \gamma(0)$ 为起点.

对于曲线 γ , 定义其在点 $t_0 \in (a, b)$ 处的速度向量为

$$\gamma'(t_0) := d\gamma_{t_0}(\partial_t|_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)} M,$$

特别当 $M = \mathbb{R}$ 时, 作为 $\mathbb{R}$ 中切向量的 $\gamma'(t_0)$ 恰好与它作为函数的导数取值对应.

下面的例子说明, 对于欧氏空间中的曲线, 速度向量就是其上的切向量.

例 2.2 设 $\gamma(t) = (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma'(t) = a\partial_x + b\partial_y$, 其中

$$a = c'(t)(x) = \frac{d(x \circ \gamma)}{dt}(t) = 2t, \quad b = c'(t)(y) = \frac{d(y \circ \gamma)}{dt}(t) = 3t^2,$$

因此 $c'(t) = 2t\partial_x + 3t^2\partial_y$, 恰好对应 $(2t, 3t^2)$.

进一步可得

命题 2.3

设光滑曲线 $\gamma: (a, b) \rightarrow M$, $(U, x^1, \dots, x^n)$ 为 $\gamma(t) \in M$ 处的坐标卡, 记 $\gamma^i = x^i \circ \gamma$, 则

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n (\gamma^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

证明 设 $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n a^i \partial_{x^i} \Big|_{\gamma(t)}$, 则

$$a^i = \gamma'(t)(x^i) = \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt}(t) = (\gamma^i)'(t).$$

任意光滑曲线都确定了起点 $\gamma(0)$ 处的一个切向量 $\gamma'(0)$, 因此借助曲线可以给出看待切空间 $T_p M$ 的另一种思路: 以 p 为起点的曲线在起点的切向量的全体.

命题 2.4 (切向量确定曲线)

设 M 为光滑流形, 对任意 $p \in M, X_p \in T_p M$, 存在以 p 为起点的曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ 使得 $X_p = \gamma'(0)$.

证明 设 (U, ϕ) 为 p 处的坐标卡且 $\phi(p) = 0$, $X_p = \sum a^i \partial_{x^i} \Big|_p$, 考虑曲线 (取 ε 充分小可使 $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \phi(U)$)

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \quad t \mapsto (a^1 t, \dots, a^n t),$$

则有 $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) = \sum a^i \partial_{r^i} \Big|_0$, 其中 $r^i \circ \phi = x^i$. 令 $\gamma = \phi^{-1} \circ \alpha$, 则 $\gamma(0) = p$ 且

$$\gamma'(0) = d\phi_{\phi(p)}^{-1}(\alpha'(0)) = d\phi_{\phi(p)}^{-1} \left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_0 \right) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = X_p.$$

命题 2.5

设 M 为光滑流形, $X_p \in T_p M, f \in C^\infty(M)$, 若 γ 是以 p 为起点的曲线且 $\gamma'(0) = X_p$, 则

$$X_p(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma(t).$$

证明 直接计算得到

$$X_p(f) = \gamma'(0)(f) = d\gamma_0(\partial_t|_0)(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma(t).$$

借助曲线, 可以给出一个计算微分的方法.

命题 2.6 (用曲线计算微分)

设 $f: N \rightarrow M$ 为光滑映射, $p \in N, X_p \in T_p N$, 若 γ 是以 p 为起点的曲线且 $\gamma'(0) = X_p$, 则

$$df_p(X_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma(t).$$

证明 直接计算得到

$$df_p(X_p) = df_p(\gamma'(0)) = df_{\gamma(0)} \circ d\gamma_0(\partial_t|_0) = d(f \circ \gamma)_0(\partial_t|_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma(t)).$$

例 2.3 左乘映射的微分 考虑 $GL_n(\mathbb{R})$ 上的左乘映射 L_g , 为计算其在 I 处的微分, 取曲线 γ 使得 $\gamma(0) = I, \gamma'(0) = X_I \in T_I(GL_n(\mathbb{R}))$, 则

$$d(L_g)_I(X_I) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (L_g \circ \gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g\gamma(t)) = g\gamma'(0) = gX_I.$$

2.2 光滑函数的局部性态

微分可以视为将流形的局部信息“编码”到了切空间中，本节将讨论如何从切空间“解码”出流形的局部信息.

2.2.1 反函数定理

我们在前面证明过流形上用 Jacobian 刻画的反函数定理，下面我们在微分语言下证明它.

定理 2.2 (反函数定理)

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射，则 f 为 $p \in M$ 处的局部微分同胚当且仅当 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 为线性同构. 

注 当取定两个坐标卡后， $d(\psi \circ f_p \circ \phi^{-1})$ 在标准基下的矩阵就是它的 Jacobian，因此反函数定理的两种形式是等价的.

证明 一边是显然的；另一边取 $p, f(p)$ 处的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 $f(U) \subset V$. ϕ, ψ 都是局部微分同胚说明

$$d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\phi_{\phi(p)}^{-1}: T_{\phi(p)} U \cong \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\psi(f(p))} V \cong \mathbb{R}^n$$

为线性同构，根据欧氏情形可知存在 $\phi(p), \psi(f(p))$ 的邻域 U_1, V_1 使得 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: U_1 \rightarrow V_1$ 为微分同胚，取 $U' = \phi^{-1}(U_1), V' = \psi^{-1}(V_1)$ ，则

$$f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \phi: U' \rightarrow V'$$

为微分同胚，即为 p 处的局部微分同胚.

局部微分同胚未必是整体微分同胚，但如果在每一点都是局部微分同胚，那么加上可逆条件就能将其合成为整体微分同胚.

命题 2.7 (局部微分同胚 $\Rightarrow$ 整体微分同胚)

设光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 在每一点 $p \in M$ 处都是局部微分同胚，若 f 可逆，则 f 为整体微分同胚. 

证明 根据粘接引理可知 f 为同胚，注意到 f^{-1} 在每一点 $q = f(p)$ 的光滑性只与其局部性质有关即可.

最后作一些补充解释，在“光滑流形范畴”中，态射为光滑映射，等价于微分同胚；而在“带点光滑流形范畴”（可以理解为流形的局部）中，态射为函数的芽，等价于局部微分同胚.

2.2.2 淹没、浸入与常秩定理

对于一般的线性映射，我们会更关心单射、满射；同理，对于映射的微分，我们也更关心单射与满射的情形.

定义 2.5 (淹没 & 浸入)

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射.

- 若 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 为满射，则称 f 是 p 处的淹没. 若 f 处处淹没则称之为淹没映射.
- 若 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 为单射，则称 f 是 p 处的浸入. 若 f 处处浸入则称之为浸入映射. 

注 显然

- 若 f 在一点处为淹没，则 $\dim M \geq \dim N$.
- 若 f 在一点处为浸入，则 $\dim M \leq \dim N$.

下面是欧氏空间中经典的淹没、浸入的例子.

例 2.4 典范淹没与典范浸入

- 设 $m \geq n$ ，则投影映射

$$\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

是淹没.

- 设 $m \leq n$, 则嵌入映射

$$\iota: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

是浸入.

事实上, 任意淹没、浸入在局部来看都是正则淹没与正则浸入.

定理 2.3 (典范淹没定理)

设 $f: M \rightarrow N$ 为 p 处的淹没, 则存在 $p, f(p)$ 处的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 $f(U) \subset V$ 且

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \pi|_V.$$



定理 2.4 (典范浸入定理)

设 $f: M \rightarrow N$ 为 p 处的浸入, 则存在 $p, f(p)$ 处的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 $f(U) \subset V$ 且

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} = \iota|_U.$$



我们不证明这两个定理, 转而定义秩的概念, 并证明更一般的常秩定理.

常秩定理

定义 2.6 (常秩映射)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, 定义线性映射 df_p 在 $p \in M$ 处的秩为 f 在 p 处的秩. 若存在 p 的邻域 U 使得 f 在 U 上的秩为常数 r , 则称 f 为 p 处的常秩映射.



若 f 在 p 处是淹没/浸入, 则取坐标卡后 df_p 对应的 Jacobi 矩阵有满秩子阵, 根据连续性, 存在 p 的邻域 U 使得对任意 $x \in U$, df_x 的子阵都是满秩的, 因此 f 在 p 处是常秩映射.

例 2.5

- 容易验证, 典范淹没与典范嵌入的复合 $\iota \circ \pi$ 是每一点的常秩映射, 这可称为“典范常秩映射”.
- 对应欧氏空间中的线性映射, 容易证明其微分还是自身, 因此谈线性映射的秩时不会产生矛盾.
- 非常秩映射: 考虑

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy),$$

则 $Jf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, 它在 $(0,0)$ 处不是常秩映射 (但在原点之外都是).

借助欧氏空间中的常秩定理, 可以证明流形上的常秩定理.

定理 2.5 (欧氏空间中的常秩定理)

设 $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 p 附近秩恒为 r , 则存在 $p, f(p)$ 附近的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$



定理 2.6 (流形上的常秩定理)

设 $f: M \rightarrow N$ 在 p 附近秩恒为 r , 则存在 $p, f(p)$ 附近的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$



证明 取 $p, f(p)$ 附近的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 $f(U) \subset V$ 且 f 在 U 上常秩, 由于

$$d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\varphi(x)} = d\psi_{f(x)} \circ df_x \circ d\phi_{\varphi(x)}^{-1},$$

故 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: U \rightarrow V$ 为常秩光滑映射, 根据欧氏空间的结论可得.

2.3 正则值与 Sard 定理

本节将证明：对任意光滑映射 $f: M \rightarrow N$ ， N 中“几乎所有点”都是 f 的正则值（例如测度意义下的全测度集或 Baire 纲意义下的剩余集）。

2.3.1 临界点与正则点

定义 2.7 (临界点/临界值/正则点/正则值)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑， $p \in M, q \in N$ 。

- 若 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 不是满射，则称 p 为 f 的临界点。
- 若 p 为临界点，则其像 $f(p)$ 称为 f 的临界值。
- 若 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 是满射，则称 p 为 f 的正则点。
- 若 q 不是 f 的临界值，则称之为 f 的正则值。



注 根据定义，临界值是临界点的像，但正则值未必是正则点的像，例如

- $N \setminus \text{Im } f$ 中的值都是正则值。
- 正则点的像也可能是临界值（例如它与某个临界点取相同值）。

另外根据典范浸入定理可知正则点集为开集，故临界点集 $\text{Crit}(f)$ 为闭集。

对于光滑函数的情形，临界点有我们熟悉的形式，它反映在欧氏空间中就是梯度为 0 的点。

命题 2.8 (光滑函数的临界点)

设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数，则 $p \in M$ 为 f 的临界点当且仅当存在 p 处的坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 使得 f 关于它的偏导数为 0，即

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$



证明 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ 不是满射当且仅当对任意 $X_p \in T_p M$ 都有 $df_p(X_p) = 0$ ，即（回忆 $T_t \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 的对应）

$$df_p(\partial_i) = \partial_{x^i} f|_p = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

特别地，紧流形上的光滑函数至少有两个临界点。

例 2.6

- 考虑 S^n 中的高度函数，则它的临界点只有南北极点，**临界值只有 ± 1** 。
- 若 $f: M \rightarrow N$ 为常值映射，或 $\dim M < \dim N$ ，则 M 中任意点都是临界点，进而 $f(M)$ 中任意值都是临界值。
- 设 $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ ，取 $\mathbb{R}$ 上的鼓包函数 f_0 使得

$$\text{supp } f_0 \subset (-1/3, 1/3), \quad f_0|_{(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} \equiv 1,$$

构造函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_0(x - k)$$

则任意 $k \in \mathbb{N}$ 都是它的临界点，进而其临界值集合包含 $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$ ，即其**临界值集合可数稠密**。

- 取 $\mathbb{R}$ 上的非负非零光滑函数 f 使之在 Cantor 集 $\mathcal{C}$ 中恒为 0，在 $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$ 中恒正（这是可以从 Cantor 集构造过程操作得到），考虑

$$g(x) = \int_0^x f(x) dx \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

则 g 的临界点集等于 f 的零点集，因此包含 $\mathcal{C}$ ，其**临界值集是不可数的**。

但不论如何, Sard 定理将告诉我们, 正则值始终“很多”(或者说临界值“很少”).

2.3.2 Sard 定理

¶ 流形上的零测集

为了描述集合的大小, 一种方法是借助测度 $\mathbb{R}^n$ 中有 Lebesgue 测度, 因此我们的动机是借助局部欧氏将这一概念迁移过来. 但是要注意, 测度是流形上的额外结构, 直接利用局部欧氏迁移得到的“测度”不是良定的(因为微分同胚不保证测度不变), 但所幸我们只需要描述“很小”, 因此只需迁移“零测”的概念即可.

定义 2.8 (Lebesgue 零测集)

称 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 零测集, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个矩形 U_i 使得

$$U \subset \bigcup U_i, \quad \sum m(U_i) < \varepsilon.$$



注 这里的矩形也可以换成开集.

引理 2.3 (光滑函数将零测集映为零测集)

设 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 光滑, U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则对任意零测集 $A \subset U$, $m(f(U)) = 0$.



注 连续函数不具有这样的性质(例如 Cantor-Lebesgue 函数), 因此在拓扑流形上不能以同法迁移零测的概念.

证明 不妨设 $\bar{A}$ 为包含于 U 的紧集(因为 A 总能通过与球 $\overline{B(0, R)}$ 作交, 写成可数个这样的集合之并), 则存在开集 W 使得 $\bar{W}$ 为紧集, 并且(这是 LCH 空间中紧集与闭集的分隔)

$$\bar{A} \subset W \subset \bar{W} \subset U,$$

$\bar{W}$ 为紧集说明存在 $M > 0$, 对任意 $x, y \in W$ 都有 $|f(x) - f(y)| < M|x - y|$, 进而存在 $M' > 0$, 对任意矩形 $R \subset W$ 都有 $m(f(R)) < M'm(R)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 设 $A_1, A_2, \dots$ 是覆盖 A 的矩形, 则

$$m(f(A)) \leq \sum_i m(f(A_i)) \leq M' \sum_i m(A_i) < M'\varepsilon,$$

因此 $m(f(A)) = 0$.

注 由于在欧氏空间中, 因此过程“肆无忌惮”了些.

定义 2.9 (光滑流形上的零测集)

设 M 为光滑流形, $A \subset M$, 若对任意 $p \in A$, 存在坐标卡 (U, ϕ) 使得 $\phi(U \cap A)$ 为零测集, 则称 A 为 M 中的零测集.



¶ Sard 定理

与前面的许多定理一样, 流形上的 Sard 定理还是从欧氏空间情形得到的.

定理 2.7 (欧氏空间中的 Sard 定理)

设 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 光滑, U 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 则 f 的临界值集合是 N 中的零测集.



定理 2.8 (流形上的 Sard 定理)

对任意光滑映射 $f: M \rightarrow N$, f 的临界值集合是 N 中的零测集.



证明 设 f 临界值集为 C , 则对任意 $y = f(x) \in C$ (设 $x \in \text{Crit}(f)$), 分别取 x, y 处的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 $f(U) \subset V$, 则 $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为光滑映射, 并且 $\phi(x)$ 恰好是 g 的临界点, 根据欧氏情形, $g(\psi(x)) \in \mathbb{R}^n$ 处有零测开邻域 V' , 因此 $\phi(V \cap \phi^{-1}(V')) \subset V'$ 为零测集, 根据定义可知 C 为零测集.

¶Sard 定理: Baire 纲集版本

如果处理的流形不是有限维的, 那么由于无穷维空间中不再有较好的 Lebesgue 测度, 因此没办法自然地刻画“零测”. 但我们的目的只是在于说明集合“很小”, 并不一定要用测度来刻画. 天无绝人之路, Baire 纲集也可以用来刻画集合的“大小”.

定义 2.10 (Baire 纲集)

设 X 为拓扑空间.

- 称可数个稠密开集的交为剩余集.
- 称剩余集的补集为第一纲集 (即可数个闭疏集的并).
- 称非第一纲集为第二纲集.



注 在 Baire 纲集的语言下, 第一纲集表示“很小”的集合, 反之剩余集表示“很大”的集合.

由于我们尚未定义无穷维流形, 因此下面的讨论还是在有限维光滑流形上.

定理 2.9 (Sard 定理: Baire 纲集版本)

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射, 则 f 的正则值集合是 N 中的剩余集.



证明 只需证明对任意 $x \in \text{Crit}(f)$, 存在邻域 U_x 使得 $f(\text{Crit}(f) \cap \overline{U}_x)$ 是闭疏集, 由于 $\text{Crit}(f)$ 可以被可数个 $U_1, U_2, \dots$ 覆盖, 因此临界值集合

$$f(\text{Crit}(f)) = \bigcup_i f(\text{Crit}(f) \cap \overline{U}_i)$$

是第一纲集, 故正则值集合是剩余集.

首先取 x 的坐标邻域 U_x 使得 $\overline{U}_x$ 为紧集, 则 $\text{Crit}(f) \cap \overline{U}_x$ 是紧集, 进而 $f(\text{Crit}(f) \cap \overline{U}_x)$ 是紧集, 故为闭集. 其次, 由 Sard 定理可知 $f(\text{Crit}(f) \cap \overline{U}_x) \subset f(\text{Crit}(f))$ 为零测集, 因此它是疏集, 得证.

2.4 光滑子流形

2.4.1 光滑子流形

我们总是会考虑一个对象的子对象, 对于光滑流形 M , 其结构是拓扑流形 + 微分结构两部分, 因此光滑子流形 S 应当满足如下条件:

- S 是 M 的子集.
- S 自身是 $k \leq n$ 维光滑流形.
- S 的拓扑、光滑结构与 M 的拓扑、光滑结构相容 (即某种“限制”).

因此可作如下定义:

定义 2.11 (光滑子流形)

设 M 为 n 维光滑流形, $S \subset M$. 若对任意 $p \in S$, 存在 M 的坐标卡 (U, ϕ) 使得

$$\phi(U \cap S) = \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{x \in \phi(U) : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\},$$

则称 S 为 M 的 k 维光滑子流形, 称 $\text{codim } S = n - k$ 为其余维数.



注 也就是说, 光滑子流形是局部上由方程 $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ 定义的子集 (这里设 $\phi = (x^1, \dots, x^n)$).

例 2.7 光滑映射的图是子流形 设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, 则其图 $\Gamma(f)$ 是 $M \times N$ 的光滑子流形.

对任意 $(p, q) = (p, f(p)) \in \Gamma(f)$, 取 p, q 处的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$, 并且记 $x = \phi(p), y = \psi(q)$, 考虑光滑映射

$$\Phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad (a, b) \mapsto (a, b - \psi \circ f \circ \phi^{-1}(a)),$$

易见 Φ 是单射且是每一点的局部微分同胚, 因此 Φ 实际上是 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 到其像集的整体微分同胚, 这就得到了 (p, q) 在 $M \times N$ 中的坐标卡 $(U \times V, \Phi \circ (\phi, \psi))$, 并且

$$(p, q) \in \Gamma(f) \cap U \times V \Rightarrow \Phi(\phi(p), \psi(q)) = (\phi(p), 0),$$

因此 $\Gamma(f)$ 是 $M \times N$ 的光滑子流形.

注 对于一般的连续映射, 其图未必是乘积流形的光滑子流形. 不过确实存在不光滑, 但图是子流形的映射: 考虑 $f(x) = x^{1/3}$, 它可以视为 $x = y^3$ 的图像, 因此是 $\mathbb{R}^2$ 的光滑子流形.

例 2.8 球面 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的光滑子流形, 因为它局部是光滑函数的图.

下面我们具体讨论光滑子流形的拓扑、光滑结构, 前者很简单, 取子空间拓扑即可, 而对于后者, 需要讨论子流形 S 的坐标卡. 设 $n \geq k$ 且 $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 分别为典范投影与嵌入.

命题 2.9 (子流形的光滑结构)

设 S 是 M 的光滑子流形, 赋予子空间拓扑, 则

1. 对于满足定义 2.11 的坐标卡 (U, ϕ) , 记 $X = U \cap S, \psi = \pi \circ \phi|_X$, 则有 S 上的坐标卡 $(\psi, X, \psi(X))$.
2. 这样的坐标卡两两相容, 从而给出了 S 上的一个光滑结构.
3. 在如上光滑结构下, 嵌入 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入.

证明

1. ψ 连续可逆, 并且 $\psi^{-1} = \phi^{-1} \circ j$ 也连续, 故 $(\psi, X, \psi(X))$ 是 S 上的坐标卡.
2. 转移映射

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} = \pi \circ (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ j$$

光滑, 因此这些坐标卡相容.

3. 注意到 $\phi \circ \iota \circ \psi = j$, 故 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入.

正如子空间拓扑可以视为一个使 $\iota: S \rightarrow \iota(S) \subset M$ 为同胚的拓扑, 上面给出的光滑结构也可以视为使 $\iota: S \rightarrow \iota(S) \subset M$ 为光滑浸入的结构. 进一步, 对任意 $p \in S$, $d\iota_p: T_p S \rightarrow T_p M$ 是单射, 因此可将 $X_p \in T_p S$ 与 $\tilde{X}_p = d\iota_p(X_p) \in T_p M$ 等同起来, 二者有关系

$$\tilde{X}_p(f) = d\iota_p(X_p)(f) = X_p(f \circ \iota) = X_p(f|_S),$$

也就是说可以将 $T_p S$ 视为 $T_p M$ 的子空间 $d\iota_p(T_p S)$, 一个自然的问题是, $T_p M$ 中的哪些向量在 $T_p S$ 中 (在这种意义下)?

命题 2.10 (光滑子流形的切空间)

设 $S \subset M$ 为光滑子流形, $p \in S$, 则

$$T_p S = \{X_p \in T_p M : X_p(f) = 0, \forall f \in C^\infty(M), f|_S = 0\}.$$

证明 一方面若 $X_p \in T_p S$, 则对任意 $f \in C^\infty(M), f|_S = 0$, 都有 $\tilde{X}_p(f) = X_p(f|_S) = 0$.

另一方面, 取 $p \in M$ 的满足 2.11 的坐标卡 (U, ϕ) , 则

$$T_p M = \text{Span}(\partial_1, \dots, \partial_n), \quad T_p S = \text{Span}(\partial_1, \dots, \partial_k),$$

因此 $X_p = \sum_i X^i \partial_i \in T_p S$ 当且仅当 $X^{k+1} = \dots = X^n = 0$.

设 $X_p \in T_p M$ 使得对任意 $f \in C^\infty(M), f|_S = 0$ 都有 $X_p(f) = 0$, 取鼓包函数 h 使得它在 p 附近恒为 1, 对任意 $j > k$, 设 $f_j(x) = h(x)r^j \circ \phi(x) \in C^\infty(M)$, 则 $f_j|_S = 0$, 计算其偏导数可得

$$\partial_i(f_j) = \frac{\partial(h(\phi^{-1}(x))r^j(x))}{\partial r^i}(\phi(p)) = \delta_{ij},$$

因此

$$0 = X_p(f_j) = \sum_i X^i \partial_i(f_j) = X^j \Rightarrow X_p \in T_p S.$$

2.4.2 作为原像与像集的光滑子流形

¶ 作为水平集的光滑子流形

水平集指映射 $f: M \rightarrow N$ 在某个 $q \in N$ 处的原像集 $f^{-1}(q)$, 例如球面 S^2 就是函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 的水平集 $f^{-1}(1)$.

例 2.9 考虑映射 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, 则当 $t \neq 0$ 时, $f^{-1}(t)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的光滑子流形, 但 $f^{-1}(0)$ 是两条相交直线 (它甚至不是拓扑流形), 这实际上是因为 $df_{(x,y)} = (2x, -2y)$, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时可使用隐函数定理.

上面的例子表明, 在正则值附近可以使用隐函数定理, 因此正则值的水平集有比较好的性质.

定理 2.10 (正则水平集定理)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $q \in N$ 是 f 的正则值, 则 $f^{-1}(q)$ 是 M 的 $\dim M - \dim N$ 维子流形, 此外对任意 $p \in f^{-1}(q)$ 有

$$T_p f^{-1}(q) = \text{Ker}(df_p: T_p M \rightarrow T_p N).$$

进一步借助 Sard 定理可知, 这样的光滑子流形有很多.

推论 2.4

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, 只要 $f(M)$ 在 N 中不是零测集, 则对几乎所有 $q \in f(M)$, 其原像 $f^{-1}(q)$ 都是 M 的光滑子流形.

考虑一个与上例相似的例子:

例 2.10 考虑 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 0)$, 此时 $g^{-1}((t, 0))$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的光滑子流形当且仅当 $t = 0$, 不过这时 g 的像集是零测集, 并且 g 无正则点, 这与上例的差别在于, 在任意 $p \in g^{-1}((t, 0))$ ($t \neq 0$) 附近, g 都是常秩映射, 而在原点附近则不然.

借助这种观察 (推广), 可以证明一个比正则水平集定理更强的命题.

定理 2.11 (常秩水平集定理)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $q \in N$, 若 f 在 $f^{-1}(q)$ 的某个邻域内有常秩 r , 则水平集 $f^{-1}(q)$ 是 M 的余维数为 r 的光滑子流形, 并且对任意 $p \in f^{-1}(q)$ 有

$$T_p f^{-1}(q) = \text{Ker}(df_p: T_p M \rightarrow T_q N).$$

证明 根据常秩定理, 存在 p, q 处坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 (不妨设 $\phi(p) = 0, \psi(q) = 0$)

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0),$$

因此 $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, x^{r+1}, \dots, x^m)$, 说明 $\phi(U \cap f^{-1}(q)) = \{(0, \dots, 0, x^{r+1}, \dots, x^m)\}$, 即 $f^{-1}(q)$ 为是 M 的余维数为 r 的子流形.

记 $S = f^{-1}(q)$, 下面计算 $T_p S$, 设 $\iota: S \hookrightarrow M$, 则对任意 $p \in S$ 有 $f \circ \iota(p) = q$, 因此

$$df_p \circ d\iota_p = 0 \Rightarrow T_p S \subset \text{Ker} df_p,$$

由 $\dim T_p S = \dim S = m - r$ 可得

$$\dim \text{Ker} df_p = \dim \text{Ker}(d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\phi_{\phi(p)}^{-1}) = m - r,$$

比较维数可得 $T_p f^{-1}(q) = \text{Ker} df_p$.

例 2.11

- 1 是 $f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ 的正则值, 因此 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的光滑子流形.
- $SL_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R})$ 都是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的光滑子流形.

¶ 作为像集的光滑子流形

根据前文, 任何光滑子流形 $S \subset M$ 都是光滑浸入 $\iota: S \hookrightarrow M$ 的像, 那么是否所有光滑浸入的像都是光滑子流形呢? 根据典范浸入定理, 对于浸入映射 $f: M \rightarrow N$, 在任意 $p \in M$ 局部, 都存在邻域使得 $f(U)$ 是 N 的光滑子流形, 不过整个像集 $f(M)$ 未必是 N 的光滑子流形, 例如下图

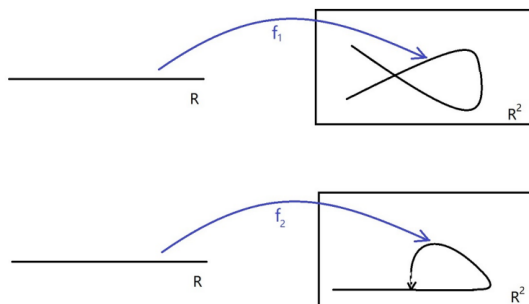


图 2.1: 两个浸入

其中第一个不是单射, 第二个像集作为子空间拓扑与原像 $\mathbb{R}$ 上的拓扑不同.

例 2.12 考虑一个更复杂的例子, 映射

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1, \quad t \mapsto (e^{it}, e^{\sqrt{2}it})$$

是浸入, 但其像是 $\mathbb{T}^2$ 上的一条“稠密曲线”.

在考虑 $f: M \rightarrow N$ 像集 $f(M)$ 时, 有两种最自然的拓扑: 从 N 继承来的子空间拓扑、从 M 继承来的 f 的余诱导拓扑 (类比商拓扑), 在前一种拓扑下, 前面的例子不是流形, 而在后一种拓扑下, $f(M)$ 自身确实是一个光滑流形 (对于单射 $f: M \rightarrow N$ 的余诱导拓扑, $U = f^{-1}(f(U))$, 因此 U 为 M 中的开集当且仅当 $f(U)$ 为余诱导拓扑下 $f(M)$ 中的开集, 因此 f 将 M 的拓扑“迁移”了过去, 因此易得 $f(M)$ 也是流形, 其上的相容坐标卡给出了微分结构) .

定义 2.12 (浸入子流形)

设 $f: M \rightarrow N$ 为单射浸入, 则称 $f(M)$ 为由 f 给出的浸入子流形.



注 为了区分浸入子流形与定义 2.11 中的光滑子流形, 后者被称为“嵌入子流形”.

¶ 嵌入子流形与浸入子流形

嵌入子流形与浸入子流形的差别就在于像集的拓扑结构, 对于前者, $\iota: S \hookrightarrow M$ 不仅是单射浸入, 还是 S 到 $\iota(S)$ 的同胚 (赋靶流形的子空间拓扑) .

定义 2.13 (嵌入映射)

设 $f: M \rightarrow N$ 为浸入, 若 f 是 M 与 $f(M)$ (赋 N 的子空间拓扑) 间的同胚, 则称 f 为嵌入映射.



注 这种定义与我们常称的“嵌入”并不矛盾.

根据定义, 每个光滑子流形都是某个嵌入映射的像, 反过来给出一个嵌入 f (如上定义), 也可以证明其像是光滑子流形 (即嵌入子流形) .

命题 2.11 (嵌入子流形 = 嵌入映射的像)

设 $f: M \rightarrow N$ 为嵌入, 则 $f(M)$ 是 N 的光滑子流形.



证明 设 $p \in M, q = f(p)$, 根据典范浸入定理, 存在 p, q 处的坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 使得 $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = j$ (即典范嵌入), 在 U 上有 $\psi \circ f = j \circ \phi$, $f: M \rightarrow f(M)$ 为同胚说明 $f(U)$ 为 $f(M)$ 中的相对开集, 即存在 N 中的开集

X 使得 $f(U) = f(M) \cap X$, 不妨设一开始的坐标邻域 $V \subset X$ (否则取交即可), 则此时 $V \cap f(M) = V \cap f(U)$, 依然考虑 q 处的坐标卡 (V, ψ) 则有

$$\psi(V \cap f(M)) = \psi(V \cap f(U)) = \psi(f(U)) = \iota(\phi(U)) = \mathbb{R}^m \times \{0\},$$

因此 $f(M)$ 为 N 的光滑子流形.

简言之, 浸入与嵌入的区别在于:

- 对于浸入 $f: M \rightarrow N$, 任意 $p \in M$ 有一个 M 中的邻域, 其像在 N 中是“好的”.
- 对于嵌入 $f: M \rightarrow N$, 任意 $q \in f(M)$ 有一个 N 中的邻域, 使得像集 $f(M)$ 在该邻域中是“好的”.

接下来我们自然会关心, 一个浸入何时是一个嵌入? 下面的命题给出了一些初步的结果.

命题 2.12 (紧流形上的单浸入是嵌入)

若 $f: M \rightarrow N$ 为单浸入, M 为紧流形, 则 f 是嵌入.

证明 只需证明 $f^{-1}: f(M) \rightarrow M$ 连续, 设 $A \subset M$ 闭, 则 M 紧说明 A 紧, 因此 $f(A)$ 紧, N 是 Hausdorff 空间说明 $f(A)$ 闭, 故 f^{-1} 连续.

事实上, 上面的证明中只有说明 $f(A)$ 紧用到了 M 的紧性, 因此命题对于 M 非紧, f 逆紧的情形也成立.

命题 2.13 (单浸入 + 逆紧 = 嵌入)

若 $f: M \rightarrow N$ 为逆紧单浸入, 则 f 是嵌入.

注 特别当 M 紧时, 所有连续映射都是逆紧映射, 因此逆紧映射也常作为空间紧性的代餐.

最后给出一个好用的命题.

命题 2.14 (光滑映射在子流形上的限制)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $\iota: X \rightarrow M$ 为光滑子流形, Y 为 N 的光滑子流形且 $f(X) \subset Y$, 则 $\tilde{f} = f \circ \iota: X \rightarrow Y$ 光滑, 并且当 f 是浸入时, $\tilde{f}$ 也是浸入.

注 特别若 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $X, f(X)$ 都是光滑子流形, 则 $\tilde{f}: X \rightarrow f(X)$ 光滑.

证明 任取 $p \in X$, 则 $f(p) \in Y \subset N$, 取 $f(p)$ 在 N 中的坐标卡 $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ 使得

$$\psi(V \cap Y) = \{x \in \psi(V) : x^{r+1} = \dots = x^n = 0\},$$

记 $\psi_V = (y^1, \dots, y^r)$, 则 $(\psi_V, V \cap Y, \psi_V(V \cap Y))$ 是 $f(p)$ 在 Y 中的坐标卡, 取 p 的邻域 $U \subset X$ 使得 $f(U) \subset V \cap Y$, 则在 U 上有 $\psi \circ f = (y^1 \circ f, \dots, y^r \circ f, 0, \dots, 0)$, 这说明 $y^i \circ f$ 均光滑, 而在 U 上有 $\psi_V \circ \tilde{f} = (y^1 \circ f, \dots, y^r \circ f)$, 因此 $\tilde{f}$ 光滑.

进一步对任意 $p \in X$ 有 $d\tilde{f}_p = df_p \circ d\iota_p$, 由于 ι 为浸入, 因此当 f 为浸入时 $\tilde{f}$ 也是浸入.

Whitney 嵌入定理

历史上有两种流形的定义: Poincaré 给出的外蕴定义 (即欧氏空间中满足特定条件的点集) 和 Weyl 给出的内蕴定义 (即局部坐标卡粘合成的对象). 后来 Whitney 证明了这两种定义是等价的, 甚至有更强的结果: 任意光滑流形都能嵌入到某个欧氏空间, 并且其维数只要是流形维数的两倍左右就够了.

定理 2.12 (Whitney 嵌入/浸入定理)

- 任意 m 维光滑流形都能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中.
- 任意 m 维光滑流形都能被浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中.

注 这里的“浸入到”并不意味着它是一个浸入子流形, 因为浸入未必是单射.

证明 见附录.

通过使用不同的技术, Whitney 在 1944 年证明了更强的结果:

定理 2.13 (强 Whitney 嵌入/浸入定理)

任意 $m \geq 2$ 维光滑流形都能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中, 且能被浸入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中.



注意到二维流形 $\mathbb{RP}^2$, Klein 瓶不能被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中, 因此强 Whitney 定理的维数是最佳的. 而后人们得到了更多相关结果, 例如:

- 任意光滑紧致可定向 m 维流形能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中.
- 对于 $m \neq 2^k$, 任意光滑 m 维流形能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中; 一般地, 任意光滑 m 维流形能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m-a(m)}$ 中, 其中 $a(m)$ 是 m 的二进制表示中 1 的个数.

2.5 Sard 定理的应用

2.5.1 Whitney 逼近定理

在前文中, 我们借助单位分解证明了流形上光滑函数的 Whitney 逼近定理 (甚至是更强的定理 1.9), 下面我们将讨论如何通过流形间的光滑映射逼近连续映射.

¶ 广义反函数定理

对于光滑映射 $f: M \rightarrow N$, 若 df_p 是线性同构, 则 f 是 p 处的局部微分同胚, 即 f 将 p 的某个邻域微分同胚到 $f(p)$ 的邻域. 事实上, 对于子流形 $X \subset M$, 在一定条件下可以将 X 的邻域微分同胚到 $f(X)$ 的某个邻域.

定理 2.14 (广义反函数定理: 紧子流形情形)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, X 是 M 的光滑紧子流形, $f|_X$ 是单射, 若对任意 $x \in X$, $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ 都是线性同构, 则存在 X 在 M 中的邻域 U 以及 $f(X)$ 在 N 中的邻域 V 使得 $f: U \rightarrow V$ 为微分同胚.



证明 根据反函数定理, f 是任意 $x \in X$ 处的局部微分同胚, 因此只需证明 f 在 X 的某个邻域中是单射. 根据 Whitney 嵌入定理, 可以将 M 嵌入到 $\mathbb{R}^K$ 中, 并且考虑 ε -邻域

$$X^\varepsilon = \{x \in M : d(x, X) < \varepsilon\},$$

X 为闭集 (Hausdorff 空间的紧子集) 说明 $X = \bigcap_{k>0} X^{1/k}$, 若不存在使 f 为单射的邻域, 则它在每个 $X^{1/k}$ 上都不是单射, 即存在 $a_k \neq b_k \in X^{1/k}$ 使得 $f(a_k) = f(b_k)$, 根据 $\mathbb{R}^K$ 的列紧性, $\{a_k\}, \{b_k\}$ 有同一收敛子列 (这是可以做到的), 并且极限点满足 $a_\infty, b_\infty \in X, f(a_\infty) = f(b_\infty)$, 由 f 在 X 的单射可知 $a_\infty = b_\infty$, 但根据前面的逼近点列可知 f 在 a_∞ 的任意邻域中都不是单射, 与一开始的讨论矛盾.

注意上面的证明并没有用到 X 的子流形条件, 只需要它是 M 的紧子集, 因此定理有更强的版本:

定理 2.15 (广义反函数定理: 紧集情形)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, X 是 M 的紧子集, $f|_X$ 是单射, 若对任意 $x \in X$, $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ 都是线性同构, 则存在 X 在 M 中的邻域 U 以及 $f(X)$ 在 N 中的邻域 V 使得 $f: U \rightarrow V$ 为微分同胚.



当 X 非紧时, 仅假设 $f|_X$ 为单射是不够的, 原因在于 $f(X)$ 未必是 N 的子流形 (回忆紧流形上的单浸入是嵌入).

例 2.13 考虑覆叠映射

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad (s, t) \mapsto (e^{is}, e^{it}),$$

f 在每一点都是局部微分同胚, 但取 $X = \{(t, \sqrt{2}t) : t \in \mathbb{R}\}$ 可知 $f|_X$ 为单射, 但不存在 X 的邻域 U 和 $f(X)$ 的邻域 V 使得 $f: U \rightarrow V$ 为微分同胚.

所幸只要满足这一条件, 还是有相同的结论.

定理 2.16 (广义反函数定理: 一般情形)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $X, f(X)$ 分别是 M, N 的光滑子流形, $f|_X: X \rightarrow f(X)$ 是微分同胚. 若对任意 $x \in X$, $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ 都是线性同构, 则存在 X 在 M 中的邻域 U 以及 $f(X)$ 在 N 中的邻域 V 使得 $f: U \rightarrow V$ 为微分同胚.



证明 设 X 非紧, 证明思路是将其分解为可数个“紧带状集合”的并, 化归到紧流形的情形. 取 $f(X)$ 上的正光滑穷竭函数 g , 可得分解

$$f(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} g^{-1}([k, k+1]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k,$$

其中每个 K_k 为紧集, $f|_X: X \rightarrow f(X)$ 为微分同胚说明有分解

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} f|_X^{-1}(K_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,$$

其中每个 J_k 也是紧集. 根据紧子集情形, 存在 $J_{k-1} \cup J_k \cup J_{k+1}$ 的开邻域 $\tilde{U}_k$ 使得 f 在其上为微分同胚. 另外通过将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^K$ 可证

$$d_k := d(K_k, \bigcup_{j>k+1} K_j) = d(g^{-1}([k, k+1]), g^{-1}([k+2, \infty))) > 0.$$

取递减正数列 $\{\varepsilon_n\}$ 使得每个 $\varepsilon_n < d_n/2$, 则只要 $|l-k| > 1$ 就有 $K_k^{\varepsilon_k} \cap K_l^{\varepsilon_l} = \emptyset$, 令

$$U_k = \tilde{U}_{k-1} \cap \tilde{U}_k \cap \tilde{U}_{k+1} \cap f^{-1}(K_k^{\varepsilon_k}),$$

则 U_k 是 J_k 的开邻域, $V_k = f(U_k)$ 是 K_k 的开邻域, 并且 $f|_{U_k}: U_k \rightarrow V_k$ 为微分同胚, 此外根据定义可知 $U_{k-1} \cup U_k \cup U_{k+1} \subset \tilde{U}_k$. 定义

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k, \quad V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k,$$

则 U, V 分别是 $X, f(X)$ 的开邻域, 并且 $f|_U$ 是每一点的局部微分同胚, 设 $x, y \in U$ 使得 $f(x) = f(y)$, 则存在 k 使得 $f(x) = f(y) \in V_k \subset K_k^{\varepsilon_k}$, $x, y \in f^{-1}(K_k^{\varepsilon_k})$, 因此 $x, y \in U_{k-1} \cup U_k \cup U_{k+1} \subset \tilde{U}_k$, f 为 $\tilde{U}_k$ 上的微分同胚说明 $x = y$, 因此 f 为 U 上的微分同胚.

管状邻域

设 X 是嵌入到 $\mathbb{R}^K$ 的 r 维子流形, 则可以借助 $\mathbb{R}^K$ 的内积结构定义“垂直方向”, 即将 $T_x X$ 视为 $T_x \mathbb{R}^K \cong \mathbb{R}^K$ 的 r 维子空间

$$T_x X \cong d\iota_x(T_x X) \leq T_x \mathbb{R}^K \cong \mathbb{R}^K,$$

取法空间 $N_x(X, \mathbb{R}^K)$ 为 $T_x X$ 在 $\mathbb{R}^K$ 中的正交补, 则它是 $K-r$ 维子空间, 仿照切丛, 将这些法空间集合起来可得法丛

$$N(X, \mathbb{R}^K) = \{(x, v) : x \in X, v \in N_x(X, \mathbb{R}^K)\} \subset T\mathbb{R}^K,$$

进一步取 $\mathbb{R}^K$ 中与 X 相容的坐标卡可以证明:

命题 2.15 (法丛的光滑结构)

$N(X, \mathbb{R}^K)$ 是 $T\mathbb{R}^K \cong \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K$ 的 K 维光滑子流形, 并且典范投影 $\pi: N(X, \mathbb{R}^K) \rightarrow X$ 是淹没.



证明 对任意 $(p, v) \in N(X, \mathbb{R}^K)$, 我们将给出它在 $\mathbb{R}^{2K}$ 中的一个坐标卡, 再验证定义 2.11 的条件.

设 $(p, v) \in T\mathbb{R}^K$, 取 $p \in \mathbb{R}^K$ 的坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^K)$ 使得 $(\phi_U, U \cap S)$ 是 $p \in X$ 的坐标卡, 对任意 $x \in U$, $\partial_i|_x = (d\phi_x)^{-1}(\partial_{r+i}|_{\phi(x)})$, $1 \leq i \leq K$ 构成了 $T_x \mathbb{R}^K$ 的一组基 (内积也可以迁移过来, 即一组正交基),

设 $\partial_i|_x = \sum_{j=1}^K a_{ij}(x) \partial_{x^j}|_x$ (左右都是一组基, 转移矩阵可逆), 定义光滑映射

$$\Phi: U \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{2K}, \quad (x, v) \mapsto (x^1(x), \dots, x^K(x), \langle v, \partial_1|_x \rangle, \dots, \langle v, \partial_K|_x \rangle),$$

其微分 (Jacobi 矩阵) 为

$$d\Phi_{(x,v)} = \begin{pmatrix} (d\phi_x)_{K \times K} & 0 \\ * & (a_{ij}(x))_{K \times K} \end{pmatrix},$$

因此它在任意 (x, v) 处都是局部微分同胚, 若 $\Phi(x, v) = \Phi(x', v')$ 则 $x = x'$, 在 $T_x \mathbb{R}^K$ 中, 根据正交性可知 $v = v'$, 因此 Φ 是 $U \times \mathbb{R}^K$ 上的一个坐标映射.

根据 X 的维数可知 $\partial_{x^1}|_p, \dots, \partial_{x^r}|_p$ 是 $T_p X$ 的一组基, 因此 $(p, v) \in N(X, \mathbb{R}^K) \cap (U \times \mathbb{R}^K)$ 当且仅当

$$x^{r+1} = \dots = x^K = \langle v, \partial_1|_x \rangle = \dots = \langle v, \partial_r|_x \rangle = 0,$$

因此 $N(X, \mathbb{R}^K)$ 是子流形. 此外典范投影显然是淹没.

定义 2.14 (欧氏空间子流形的法丛)

上面的 $N(X, \mathbb{R}^K)$ 称为 X 在 $\mathbb{R}^K$ 中的法丛.

进一步可以证明, 欧氏子流形具有较好的“管状邻域”.

定义 2.15 (欧氏子流形的管状邻域)

设 X 是 $\mathbb{R}^K$ 的光滑子流形, 若存在 X 在 $N(X, \mathbb{R}^K)$ 、 X 在 $\mathbb{R}^K$ 中的邻域 U, V 以及微分同胚 $f: U \rightarrow V$ 使得 $f|_X = \text{Id}|_X$, 则称 (f, V, U) (或直接称 V) 为 X 的一个管状邻域.

注 这里实际上将 X 等同于 $X \times \{0\}$, 嵌入到 $N(X, \mathbb{R}^K)$ 中.

定理 2.17 (欧氏子流形的管状邻域定理)

$\mathbb{R}^K$ 的任意光滑子流形 X 都有管状邻域.

证明 考虑光滑映射 (光滑性原因类似命题 2.14, 并且它具有一定的线性性, 微分还是自身)

$$h: N(X, \mathbb{R}^K) \rightarrow \mathbb{R}^K, \quad (x, v) \mapsto x + v,$$

则对任意 $(x, 0) \in N(X, \mathbb{R}^K)$, $dh_{(x,0)}$ 将 $T_{(x,0)}(X \times \{0\}) \subset T_{(x,0)}N(X, \mathbb{R}^K)$ 双射地映为 $T_x X \subset T_x \mathbb{R}^K$, 并且将 $T_{(x,0)}(\{x\} \times N_x(X, \mathbb{R}^K))$ 双射地映为 $N_x(X, \mathbb{R}^K)$, 因此 $dh_{(x,0)}$ 可逆, 另一方面 h 将 $X \times \{0\} \subset N(X, \mathbb{R}^K)$ 微分同胚地映为 $X \subset \mathbb{R}^K$, 根据广义反函数定理, h 将 $X \times \{0\}$ 在 $N(X, \mathbb{R}^K)$ 中的某个邻域 U 微分同胚地映为 X 在 $\mathbb{R}^K$ 的邻域 V .

借助欧氏空间的度量结构, 可以具体解释“管状”的含义.

定理 2.18 (ε -邻域定理)

对 $\mathbb{R}^K$ 的任意光滑子流形 X , 存在正值连续函数 $\varepsilon: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, 使得 X 的 ε -邻域

$$X^\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^K : \exists x \in X, |y - x| < \varepsilon(x)\}$$

满足

1. 对任意 $y \in X^\varepsilon$, 在 X 中存在唯一一个距离 y 最近的点 $\pi_\varepsilon(y)$.
2. 映射 $\pi_\varepsilon: X^\varepsilon \rightarrow X, y \mapsto \pi_\varepsilon(y)$ 是淹没.

证明 令 h, U, V 如上一定理所述, 定义连续正值函数

$$\varepsilon(x) = \sup\{r \leq 1 : B_r(x) \subset V\},$$

则 $X^\varepsilon \subset V$ 是开子流形, 考虑光滑映射

$$\pi_\varepsilon: X^\varepsilon \rightarrow X, \quad y \mapsto \pi_\varepsilon(y) = \pi \circ h^{-1}(y),$$

π 为淹没而 h^{-1} 为微分同胚说明 π_ε 是淹没, 下证 $\pi_\varepsilon(y)$ 是 X 中唯一离 y 最近的点. 令 $z \in X$ 是这样一个点, 则 $B(y, |y-z|)$ 在 z 处与 X 相切, 因此 $y-z \in N_z(X, \mathbb{R}^K)$, 由此可得

$$y = z + (y-z) = h(z, y-z),$$

即 $\pi_\varepsilon(y) = z$.

¶ Whitney 逼近定理

借助 ε 邻域定理可以证明另一个 Whitney 逼近定理.

定理 2.19 (Whitney 逼近定理)

设 M, N 为光滑流形, $g: M \rightarrow N$ 连续, 则存在同伦于 g 的光滑映射 f . 若 g 还在闭集 A 上光滑, 则可使 $f|_A = g|_A$.



证明 将 N 嵌入 $\mathbb{R}^K$, 则存在连续函数 $\varepsilon: N \rightarrow \mathbb{R}_+$ 使得任意 $y \in N^\varepsilon$ 有唯一最近点 $\pi_\varepsilon(y) \in N$, 将 g 视为 M 到 $\mathbb{R}^K$ 的连续映射, 令 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \circ g$, 则由定理 1.9 可得光滑函数 $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^K$ 使得

$$|\tilde{f}(x) - g(x)| < \tilde{\varepsilon}(x), \quad \forall x \in M,$$

因此 $\tilde{f}(x) \in B(g(x), \varepsilon(g(x))) \subset N^\varepsilon$, 这说明 (凸性)

$$(1-t)g(x) + t\tilde{f}(x) \in B(g(x), \varepsilon(g(x))) \subset N^\varepsilon, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

定义

$$F: M \times I \rightarrow N, \quad (x, t) \mapsto \pi_\varepsilon((1-t)g(x) + t\tilde{f}),$$

则 F 是连续映射 g 到光滑映射 $f = F(-, 1) = \pi_\varepsilon \circ \tilde{f}: M \rightarrow N$ 的同伦. 特别当 g 在 A 上光滑时, 一开始可取 $\tilde{f}$ 使得 $\tilde{f}|_A = g|_A$, 根据 F 的定义可知 $f|_A = g|_A$.

借助 Whitney 逼近定理可以说明, 同伦与光滑同伦是等价的.

定理 2.20 (同伦 = 光滑同伦)

若 $f_0, f_1 \in C^\infty(M, N)$ 同伦, 则它们光滑同伦.



证明 设 $F: M \times I \rightarrow N$ 为连接两者的同伦, 定义延拓

$$\tilde{F}(x, t) = \begin{cases} F(x, 0), & t \leq 0, \\ F(x, 1), & t \geq 1, \end{cases}$$

则 $\tilde{F}: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ 连续, 在闭集 $M \times \{0, 1\}$ 上光滑, 根据 Whitney 逼近定理, 存在光滑映射 $\bar{F}: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ 使得在 $M \times \{0, 1\}$ 上有 $\bar{F} = \tilde{F}$, 因此 $\bar{F}$ 就是连接 f_0, f_1 的光滑同伦.

2.5.2 横截性

¶ 映射与子流形横截相交

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, 一个问题是对子流形 $X \subset N$, $f^{-1}(X)$ 何时为 M 的子流形?

对此局部考虑, 设 $p \in f^{-1}(q) \subset f^{-1}(X)$, 只需在 p 附近存在一个邻域 U 使得 $U \cap f^{-1}(X)$ 为 M 的光滑子流形, 再往局部走一步: $q \in X$ 说明存在邻域 V 及光滑映射

$$g: V \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad r = \text{codim } X = \dim N - \dim X$$

使得 $g^{-1}(0) = X \cap V$, 因此 $p \in f^{-1}(X \cap V) = (g \circ f)^{-1}(0)$, 若 p 为 $g \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ 的正则值, 则必然存在一个好的邻域, 这当且仅当 $d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$ 为满射, 由于 dg_q 为满射且 $\ker dg_q = T_q X$, 因此 $dg_q \circ df_p$ 满当且仅当 $\text{Im } df_p + T_q X = T_q N$, 这时由于一个线性代数的引理:

引理 2.4

设线性映射 $L: V \rightarrow W$ 为满射, $V_1 \leq V$, 则 $L(V_1) = W$ 当且仅当 $V_1 + \text{Ker } L = V$.

由此可以给出横截相交的定义.

定义 2.16 (横截相交)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $X \subset N$ 为光滑子流形, 若对任意 $p \in M$ 有

$$\text{Im } df_p + T_{f(p)}X = T_{f(p)}N,$$

则称 f 与 X 横截相交, 记为 $f \pitchfork X$.

命题 2.16

若 $f: M \rightarrow N$ 为淹没, 则 f 与 N 的任意光滑子流形都横截相交.

定理 2.21 (横截相交 $\Rightarrow$ 原像为子流形)

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $X \subset N$ 为光滑子流形, 且 $f \pitchfork X$, 则 $f^{-1}(X)$ 为 M 的光滑子流形, 且 $\text{codim } f^{-1}(X) = \text{codim } X$ 以及

$$T_p f^{-1}(X) = df_p^{-1}(T_{f(p)}X).$$

证明 计算得到

$$\dim f^{-1}(X) = \dim M - l = \dim M - \dim N + \dim X,$$

因此 $\text{codim } X = \text{codim } f^{-1}(X)$, 进一步由正则水平集定理可得

$$T_p f^{-1}(X) = \text{Ker } d(g \circ f)_p = df_p^{-1}(dg_{f(p)}^{-1}(0)) = df_p^{-1}(T_{f(p)}X)$$

两个子流形的横截相交

借助横截相交也可讨论另一个问题: 子流形的交是否为子流形?

定义 2.17 (横截相交)

设 X_1, X_2 为 M 的光滑子流形, 若对任意 $p \in X_1 \cap X_2$ 有 $T_p X_1 + T_p X_2 = T_p M$, 则称 X_1, X_2 横截相交, 记作 $X_1 \pitchfork X_2$.

注 若设 $\iota: X_1 \hookrightarrow M$, 则 $X_1 \pitchfork X_2$ 当且仅当 $\iota \pitchfork X_2$.

推论 2.5 (子流形的交)

设 X_1, X_2 为 M 中两个横截相交的子流形, 则 $X_1 \cap X_2$ 为 M 的光滑子流形, 并且 $\text{codim } X_1 \cap X_2 = \text{codim } X_1 + \text{codim } X_2$, 对任意 $p \in X_1 \cap X_2$ 有

$$T_p(X_1 \cap X_2) = T_p X_1 \cap T_p X_2.$$

注 这实际上是说在交点处, 定义 X_1, X_2 的方程组足够“无关”, 从而可以合并定义余维数更高的子流形.

证明 注意到一方面 $\dim X_1 - \dim X_1 \cap X_2 = \dim X - \dim X_2$, 另一方面 $d\iota_p^{-1}(T_p X_2) = T_p X_1 \cap T_p X_2$.

例 2.14 七维怪球 在 $\mathbb{C}^5 \setminus \{0\}$ 中考虑子流形

$$N_1 = \{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^{6k-1} = 0\},$$

$$N_2 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1\},$$

则 $N_1 \pitchfork N_2$ (二者的余维数分别为 2, 1), 并且 $N_1 \pitchfork N_2$ 同胚于 S^7 , 对于 $k = 1, 2, \dots, 28$, 它给出了 S^7 上所有的光滑结构.

两个映射的横截相交

定义 2.18 (横截相交)

设 $f_1: M_1 \rightarrow N, f_2: M_2 \rightarrow N$ 光滑, 若 $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N \times N$ 与对角线 Δ_N (这是一个光滑子流形) 横截相交, 则称 f_1, f_2 横截相交, 记作 $f_1 \pitchfork f_2$



注

- 特别地, 子流形 X_1, X_2 横截相交当且仅当其对应的嵌入映射横截相交.
- 映射横截相交有一个等价定义: $\text{Im } dF_x + \text{Im } dG_y = T_p N$, 对任意 $x \in M_1, y \in M_2, F(x) = G(y) = p$.

推论 2.6 (纤维积)

若 $f_1 \pitchfork f_2$, 则纤维积 $F = (f_1 \times f_2)^{-1}(\Delta_N)$ 为 $M_1 \times M_2$ 的子流形, 并且

$$T_{(p_1, p_2)} F = \{(X_1, X_2) : X_i \in T_{p_i} M_i, (df_1)_{p_1}(X_1) = (df_2)_{p_2}(X_2)\}.$$



注 事实上, 这里的纤维积满足泛性质.

横截相交的广泛存在性

定理 2.22 (横截性定理)

设 $F: S \times M \rightarrow N$ 光滑, $X \subset N$ 为光滑子流形, 记

$$f_s: M \rightarrow N, \quad f_s(p) = F(s, p),$$

若 $F \pitchfork X$, 则对于投影映射 $\pi: F^{-1}(X) \rightarrow S$ 的每个正则值 $s \in S$ 都有 $f_s \pitchfork X$.



注 特别地, 根据 Sard 定理, 对几乎所有 $s \in S$ 都有 $f_s \pitchfork X$.

推论 2.7

给定光滑映射 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^K$ 以及光滑子流形 $X \subset \mathbb{R}^K$, 对于几乎所有 $v \in \mathbb{R}^K$, v -平移

$$f_v: M \rightarrow \mathbb{R}^K, \quad p \mapsto f_v(p) = f(p) + v$$

与 X 横截相交.



若取 f 为嵌入可得

推论 2.8 (一般位置引理)

令 M, N 为 $\mathbb{R}^K$ 的光滑子流形, 则对几乎所有 $a \in \mathbb{R}^K$, $M + a \pitchfork N$.



定理 2.23 (同伦横截性定理)

若 $f: M \rightarrow N$ 光滑, $Y \subset N$ 为光滑子流形, 则 f 同伦于某个与 Y 横截相交的光滑映射 $g: M \rightarrow N$, 进一步若 $X \subset M$ 是闭子流形且 $f|_X \pitchfork Y$, 则可取 g 使得 $g|_X = f|_X$.



推论 2.9

设 M 为 m 维连通光滑流形.

- 若 $S \subset M$ 为维数 $k \leq m - 2$ 的光滑子流形, 则 $M \setminus S$ 连通.

- 若 $S \subset M$ 为维数 $k \leq m - 3$ 的平滑子流形, 则 $\pi_1(M) = \pi_1(M \setminus S)$.



第3章 光滑向量场

3.1 向量丛

定义 3.1 (向量丛)

设 E, M 为拓扑空间, $\pi: E \rightarrow M$ 连续, 满足

1. 对任意 $p \in M$, 其纤维 $\pi^{-1}(\{p\}) = E_p$ 是向量空间.
2. 局部平凡性: 对任意 $p \in M$, 存在平凡开邻域 U 以及同胚 $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$, 使得对任意 $q \in U$ 有线性空间同构 $\phi|_{\pi^{-1}(q)}: E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$, 其中 ϕ 称为局部平凡映射化映射.

则称 (E, π, M) 为 M 上的一个 r 维向量丛 (r 也称为向量丛的秩), 可简称 E 为向量丛. 特别当 E, M 为光滑流形, π, ϕ 都可取为微分同胚时, 称之为光滑向量丛.



注 后文“向量丛”一般指“光滑向量丛”; 向量丛中 M 称为底空间, E 称为全空间.

对于向量丛中的两个平凡开邻域 U_α, U_β (不妨设相交非空), 则有转移映射

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k \rightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k, \quad (x, v) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)(v)),$$

其中 $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ 光滑, 它满足

$$g_{\alpha\alpha} = \text{Id}, \quad g_{\beta\gamma}g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma},$$

反之给定 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 以及满足上述 cocycle 条件的光滑映射 $\{g_{\alpha\beta}\}$, 可以构造出 M 上的一个光滑向量丛

$$E = \coprod_{\alpha} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim,$$

其中 $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ 与 $(y, u) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$ 等价当且仅当 $x, y \in U_{\alpha\beta}$ 且 $v = g_{\alpha\beta}(x)(u)$.

例 3.1

- 对于流形 M , 考虑投影映射 $\pi: E \times \mathbb{R}^r$, 则容易验证 $(E \times \mathbb{R}^r, \pi)$ 是 M 上的 r 维光滑向量丛, 这是一个简单而直接的例子, 一般称为**平凡向量丛** (包括与之同构的丛), 另一方面, 平凡丛由 $g_{\alpha\beta} \equiv \text{Id}$ 给出.
- 对于向量丛 (E, π, M) 以及 M 的子流形 S , 有自然的向量丛结构 $(\pi^{-1}(S), \pi|_{\pi^{-1}(S)}, S)$, 可以视为 (E, π, M) 在 S 上的限制.
- 设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 为 M 的坐标卡, 取 $g_{\alpha\beta}(x) = d(\varphi_{\alpha\beta})_x$ 可以给出 M 上的**切丛**, 另一方面, 切丛也可视作将光滑流形上每一点的切空间“并置”得到向量丛.
- 考虑 $E = I \times \mathbb{R} / ((0, t) \sim (1, -t))$, 则有光滑向量丛结构

$$\pi: E \rightarrow S^1, \quad [(s, t)] \mapsto e^{2\pi i s},$$

设 $U_1 = S^1 \setminus \{+1\}, U_2 = S^1 \setminus \{-1\}$, 则

$$\pi^{-1}(U_1) = \{[(s, t)] : s \in (0, 1), t \in \mathbb{R}\},$$

$$\pi^{-1}(U_2) = \{[(s, t)] : s \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]\},$$

因此有局部平凡化

$$\phi_1: \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}, \quad [(s, t)] \mapsto (e^{2\pi i s}, t),$$

$$\phi_2: \pi^{-1}(U_2) \rightarrow U_2 \times \mathbb{R}, \quad [(s, t)] \mapsto \begin{cases} (e^{2\pi i s}, t), & s \in [0, 1/2), \\ (e^{2\pi i s}, -t), & s \in (1/2, 1], \end{cases}$$

并且可以写出转移映射为

$$\phi_{12}: U_{12} \times \mathbb{R} \rightarrow U_{12} \times \mathbb{R}, \quad (e^{2\pi is}, t) \mapsto \begin{cases} (e^{2\pi is}, t), & s \in (0, 1/2), \\ (e^{2\pi is}, -t), & s \in (1/2, 1). \end{cases}$$

E 称为 **Mobius 丛**.

命题 3.1

S^1 上的光滑向量丛（在同构意义下）只有平凡丛和 Mobius 丛.

定义 3.2 (子向量丛)

设 $\pi: E \rightarrow M$ 为向量丛, 若 E 的子流形 F 满足 $\pi|_F: F \rightarrow M$ 依然为 M 上的向量丛, 则称 F 为 E 的子向量丛.

¶ 向量丛的运算

定义 3.3 (丛映射)

设 $(E, \pi_E, M), (F, \pi_F, N)$ 为两个向量丛, 称一对光滑映射 $(f, \tilde{f})$ 为 (光滑) 向量丛映射, 若

- $\pi_F \circ \tilde{f} = f \circ \pi_E$, 或者说满足如下交换图

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

- 对任意 $p \in M$, $\tilde{f}: E_p \rightarrow F_{f(p)}$ 为线性映射.

注 容易验证, 光滑向量丛与丛映射构成一个范畴.

对于向量丛

定义 3.4 (向量丛的直和 (Whitney sum))

设 E_1, E_2 为 M 上的向量丛, 转移映射分别为 $\{g_{\alpha\beta}^1\}, \{g_{\alpha\beta}^2\}$, 称由 $\{g_\alpha = \text{diag}(g_{\alpha\beta}^1, g_{\alpha\beta}^2)\}$ 给出的丛为 E_1, E_2 的直和, 记为 $E_1 \oplus E_2$.

注 记 $F = E_1 \oplus E_2$, 则显然 $\dim F = \dim E_1 + \dim E_2$ (作为向量丛), 在每个纤维上有 $F_x = E_{1x} \oplus E_{2x}$, 进一步可以定义有限直和. 事实上, 上面给出的直和就是向量丛范畴中的“直和”.

定义 3.5 (向量丛的商)

设 E, F 为 M 上的向量丛, F 为 E 的子丛, 称 E/F 为它们的商, 其转移映射由 E 上的转移映射自然诱导.

定义 3.6 (向量丛的拉回)

设 $f: N \rightarrow M$ 光滑, $\pi: E \rightarrow M$ 为向量丛, 称拉回流形 $f^{-1}E$ 为 N 上 f 的拉回丛, 即满足如下交换图

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

其中 $f^{-1}E = \{(x, y) \in N \times E | f(x) = \pi(y)\}$.

注 $f^{-1}E$ 上有 N 上向量丛的结构, 若设 E 上转移映射为 $\{g_{\alpha\beta} \text{ on } U_{\alpha\beta}\}$, 则它可以视作由 $\{f^*g_{\alpha\beta} \text{ on } f^{-1}(U_{\alpha\beta})\}$ 给出.

¶ 向量丛的截面

定义 3.7 (光滑截面)

设向量丛 $\pi: E \rightarrow M$, 若 $s: M \rightarrow E$ 满足 $\pi \circ s = \text{Id}_M$ (或者说对任意 $p \in M$, $s(p) \in E_p$), 则称 s 是该向量丛的一个截面. 若 s 光滑, 则称之为一个光滑截面.

注

1. 光滑截面的全体记为 $\Gamma^\infty(\pi)$, 简记 $\Gamma(\pi)$ (有时也可记作 $\Gamma(E)$).
2. 对于开集 $U \subset M$, 也可以定义 U 上的截面 $\Gamma(U, E)$, 它是一个 $C^\infty(U)$ -模. 光滑截面不仅是一些光滑映射, 它还带有自然的 $C^\infty(M)$ -模结构.

命题 3.2 (光滑截面的模结构)

设 $\pi: E \rightarrow M$ 为向量丛, 则

1. 对任意 $s, t \in \Gamma(\pi)$, $s + t \in \Gamma(\pi)$.
2. 对任意 $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(\pi)$, $fs \in \Gamma(\pi)$.

或者说 $\Gamma(\pi)$ 是一个 $C^\infty(M)$ -模.

注 可以证明 $\Gamma(\pi)$ 是一个有限生成投射模, 并且连通光滑流形 M 上的向量丛范畴与有限生成投射 $C^\infty(M)$ -模有一一对应关系.

定义 3.8 (光滑标架)

设 $\pi: E \rightarrow M$ 为 r 维向量丛, 称 $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(U, E)$ 为开集 $U \subset M$ 上的一组光滑标架, 若对任意 $p \in U$, $s_1(p), \dots, s_r(p)$ 构成 E_p 的一组基.

注 省略光滑性, 也可以定义出一般的标架, 但在后面的许多陈述中, 都会忽略“光滑”二字.

例 3.2

- $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ 是切丛 $T\mathbb{R}^3$ 的一组光滑标架.
- 考虑平凡丛 $M \times \mathbb{R}^r$, 考虑

$$\bar{e}_i: M \rightarrow M \times \mathbb{R}^r, \quad p \mapsto (p, e_i), \quad i = 1, \dots, r,$$

则 $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ 是该向量丛的一组光滑标架.

- 设 $\pi: E \rightarrow M$ 为 r 维光滑向量丛, $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ 为其平凡化, 若定义 $t_i = \phi^{-1} \circ \bar{e}_i$, 则 $t_1, \dots, t_r$ 是 $\pi^{-1}(U)$ 的一组光滑截面, 称为 ϕ 的平凡化截面.

光滑标架给出了一个判断截面光滑性的方法.

引理 3.1

设 $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ 为光滑向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的平凡化, $t_1, \dots, t_r$ 是 ϕ 的平凡化截面, 则截面 $s = \sum_{i=1}^r b^i t_i$ 光滑当且仅当 $b^1, \dots, b^r \in C^\infty(U)$.

证明 $\Leftarrow$: 根据它的模结构是显然的.

$\Rightarrow$: 注意到对任意 $p \in U$ 有

$$\phi \circ s(p) = \sum_{i=1}^r b^i(p) \phi(t_i(p)) = \sum_{i=1}^r b^i(p) (p, e_i) = \left(p, \sum_{i=1}^r b^i(p) e_i \right),$$

s 光滑说明 $\phi \circ s$ 光滑, 因此每个 b^i 光滑.

命题 3.3 (截面的光滑性)

设 $\pi: E \rightarrow M$ 为光滑向量丛, U 为 M 中的开集, $s_1, \dots, s_r$ 为 U 上的光滑标架, 则截面 $s = \sum_{i=1}^r c^i s_i$ 光滑当且仅当 $c^1, \dots, c^r \in C^\infty(U)$.

证明 $\Leftarrow$: 显然.

$\Rightarrow$: 对任意 $p \in U$, 取平凡开邻域 $V \subset U$ 以及平凡化 $\phi: \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^r$, 设 $t_1, \dots, t_r$ 为其标架, $s_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} t_i$, 再设 $\sum_{i=1}^r b^i t_i = s = \sum_{j=1}^r c^j s_j = \sum_{i,j=1}^r c^j a_{ij} t_i$, 即

$$b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^r \end{pmatrix} = Ac,$$

根据引理, 每个 s_j 光滑说明 A 光滑, 它是两组基 (逐点) 间的转移矩阵说明其可逆, 因此 A^{-1} 也光滑, s 光滑蕴含 b 光滑, 因此 $c = A^{-1}b$ 光滑.

光滑截面的生成元

若记 $\mu_z = \{f \in C^\infty(M) : f(z) = 0\}$, 则它是 $C^\infty(M)$ 的极大理想, 进一步有如下命题:

命题 3.4

设 (E, π, M) 为光滑向量丛, $z \in M$.

1. 对任意 $y \in E_z$, 存在 $s \in \Gamma(\pi)$ 使得 $s(z) = y$.
2. 若 $s \in \Gamma(\pi), s(z) = 0 \in E_z$, 则存在 $f_i \in \mu_z, s_i \in \Gamma(\pi), i \in I$ 使得 $s = \sum_{i=1}^m f_i s_i$.

证明 当 (E, π) 平凡时结论是显然的, 对于一般情形, 可将其限制在局部处理.

1. 设 U 为 $z \in M$ 的平凡开邻域, 则由平凡情形, 对任意 $y \in E_z \subset \pi^{-1}(U)$, 存在 $s_U \in \Gamma(\pi|_{\pi^{-1}(U)})$ 使得 $s_U(z) = y$, 取鼓包函数 $\rho \in C^\infty(M)$, 它在 U 中一个包含 z 的邻域取常值 1, $\text{supp } \rho \subset U$, 则 $s = \rho s_U \in \Gamma(\pi)$ 满足要求.
2. 设 U 为 $z \in M$ 的平凡开邻域, 则存在 $e_i \in \Gamma(\pi|_{\pi^{-1}(U)}), f_i \in \mu_z \cap C^\infty(U)$ 使得

$$s|_U = \sum_{i=1}^m f_i e_i,$$

取同样的鼓包函数 ρ , 则

$$s = (1 - \rho^2)s + \sum_{i=1}^m (\rho f_i)(\rho e_i),$$

其中 $1 - \rho^2, \rho f_i \in \mu_z$, 得证.

上述命题可以用正合列的语言重新表述:

推论 3.1

对于 M 上的任意向量丛 $(E, \pi), z \in M$, 有正合列

$$0 \longrightarrow \mu_z \Gamma(\pi) \longrightarrow \Gamma(\pi) \longrightarrow E_z \longrightarrow 0$$

其中第一个映射为嵌入, 第二个映射为赋值 $s \mapsto s(z)$.

注 这说明有线性空间同构 $\Gamma(\pi)/\mu_z \Gamma(\pi) \cong E_z$.

考虑切丛 $(T\mathbb{R}^n, \pi)$, 对任意 $s \in \Gamma(\pi)$ 有

$$s(z) \in T_z \mathbb{R}^n \Rightarrow s(z) \in \text{Span}(\partial_1|_z, \dots, \partial_n|_z),$$

若记

$$\partial_i : M \rightarrow TM, \quad z \mapsto \partial_i|_z,$$

则 $\partial_1, \dots, \partial_n$ 是 $\Gamma(\pi)$ 的一组生成元, 或者说 $\Gamma(\pi)$ 是**有限生成模**. 这种思路可以推广, 给出一个由局部确定整体有限生成的方法.

命题 3.5 (逐点生成 $\Rightarrow$ 一致生成)

设 (E, π, M) 为 k 维光滑向量丛, $s_1, \dots, s_l \in \Gamma(\pi)$. 若对任意 $z \in M$ 有 $E_z = \text{Span}(s_1(z), \dots, s_l(z))$, 则 $s_1, \dots, s_l$ 是 $\Gamma(\pi)$ 的生成元.

证明 对任意 $I = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l$, 记

$$U_I = \{z \in M : s_{i_1}(z), \dots, s_{i_k}(z) \in E_z \text{ 线性无关}\},$$

则 U_I 是开集, 并且 $\{s_{i_j}|_{U_I} : 1 \leq j \leq k\}$ 生成了 $C^\infty(U_I)$ -模 $\Gamma(\pi|_{\pi^{-1}(U_I)})$. 根据条件有 $\bigcup_I U_I = M$, 并且对任意 $z \in M$, 存在 I 使得 $E_z = \text{Span}(s_i(z) : i \in I)$. 设 $s \in \Gamma(\pi)$ 有线性表示

$$s|_{U_I} = \sum_{i \in I}^k \lambda_{I,i} s_i|_{U_I}, \quad \lambda_{I,i} \in C^\infty(U_I),$$

取相应于覆盖 $\{U_I\}$ 的单位分解 $\{e_I\}$, 则

$$s = \sum_I e_I s = \sum_I e_I s|_{U_I} = \sum_I \sum_{i \in I} (\lambda_{I,i} e_I) s_i|_{U_I} \in \text{Span}(s_1, \dots, s_l),$$

根据 s 的任意性即得.

推论 3.2 (向量丛平凡 $\Leftrightarrow$ 截面自由)

向量丛 (E, π, M) 平凡当且仅当 $\Gamma(\pi)$ 是自由 $R = C^\infty(M)$ -模.

证明 $\Rightarrow$: 不妨设 $E = M \times \mathbb{R}^r$, 取 $\mathbb{R}^r$ 的一组基 $e_1, \dots, e_r$, 设 $s_i \in \Gamma(\pi), s_i(z) = (z, e_i)$, 则

$$E_z = \text{Span}(s_1(z), \dots, s_r(z))$$

, 由引理可知 $s_1, \dots, s_r$ 为 $\Gamma(\pi)$ 的生成元, 并且它们是线性无关的, 即 $\Gamma(\pi) \cong R^r$ 是自由模.

$\Leftarrow$: 设 $\Gamma(\pi)$ 有一组基 $s_1, \dots, s_r$, 则有微分同胚

$$\varphi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^r, \quad e = \sum_{i=1}^m \lambda_i s_i(x) \mapsto (x; \lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

3.2 流形上的切丛

设 M 为 n 维光滑流形, 称

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$$

为 M 的**切丛**, 其中自然有映射 (即第一个分量上的投影)

$$\pi : TM \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p,$$

并且每个纤维恰好是该点的切空间: $E_p = \pi^{-1}(p) = T_p M \cong \mathbb{R}^n$. 下面我们依次说明 TM 是 M 上的 (光滑) 向量丛.

¶ TM 上的光滑流形结构

我们的思路是借助 M 的坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 来局部迁移结构, 再将其合并为整体结构.

由于 $TU = \bigcup_{p \in U} T_p U = \bigcup_{p \in U} T_p M$ 中, 并且对任意 $v = \sum_{i=1}^n c^i(v) \partial_i|_p \in T_p M$, 其分量 $c^i = c^i(v)$ 是关于 v 的函数, 因此考虑映射

$$\tilde{\phi}: TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}, \quad (p, v) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), c^1(v), \dots, c^n(v)),$$

此时直接向 TU 赋 $\tilde{\phi}$ 的诱导拓扑 (TU 上使得 $\tilde{\phi}$ 连续的最弱的拓扑), $\tilde{\phi}$ 为双射说明在该拓扑下 $\tilde{\phi}$ 为同胚. 记

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha} \{A : A \text{ 在 } TU_{\alpha} \text{ 中为开集}\},$$

其中 U_{α} 为 M 的坐标开邻域, 我们只需证明 $\mathcal{B}$ 是 TM 的拓扑基, 则可赋 TM 以它生成的拓扑.

引理 3.2

记号如上, $\mathcal{B}$ 为 TM 的一个拓扑基.



证明 显然 $\mathcal{B}$ 覆盖 TM , 只需证明它对有限交封闭. 设 $A, B \in \mathcal{B}$ 分别为 TU, TV 中的开集, 则 $A \cap T(U \cap V), B \cap T(U \cap V)$ 是 $T(U \cap V)$ 中的开集, 而 $A \cap B \subset TU \cap TV = T(U \cap V)$, 因此

$$A \cap B = (A \cap T(U \cap V)) \cap (B \cap T(U \cap V))$$

是 $T(U \cap V)$ 中的开集.

注 证明中有一个隐含的事实: $T(U \cap V)$ 以坐标映射诱导的拓扑结构与其继承 $T(U), T(V)$ 的子空间拓扑的结构是相同的.

由于 M 可以被可数个坐标开集覆盖, 因此易证:

命题 3.6 (切丛是 T2+A2 的)

切丛 TM 有可数拓扑基, 并且是 Hausdorff 的.



TM 距离光滑流形只差一系列相容坐标卡, 而这已经在上面的过程中出现了. 下面说明, $\{(TU_{\alpha}, \tilde{\phi}_{\alpha})\}$ 是 TM 的坐标卡 (其中 $(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})$ 为 M 的坐标卡), 设

$$(U_{\alpha}, \phi_{\alpha}) = (U_{\alpha}, x^1, \dots, x^n),$$

$$(U_{\beta}, \phi_{\beta}) = (U_{\beta}, y^1, \dots, y^n),$$

则转移映射 $\tilde{\phi}_{\beta} \circ \tilde{\phi}_{\alpha}^{-1} : \phi_{\alpha}(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_{\beta}(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n$, 它的作用为

$$(\phi_{\alpha}(p), a^1, \dots, a^n) \mapsto \left(p, \sum_{j=1}^n a^j \partial_{x^j}|_p \right) \mapsto (\phi_{\alpha\beta}(\phi_{\alpha}(p)), b^1, \dots, b^n),$$

其中

$$b^i = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial(\phi_{\alpha\beta})^i}{\partial r^j}(\phi_{\alpha}(p)),$$

因此它们是相容坐标卡, 因此 TM 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 维光滑流形, 要验证 (TM, π, M) 的向量丛结构是容易的.

3.3 光滑向量场

光滑向量场实际上就是切丛的截面, 它在流形上的每一点指定了一个切向量.

定义 3.9 (光滑向量场)

设 M 为光滑流形, 称其切丛 TM 的 (光滑) 截面 $\Gamma(TM)$ 中的元素为 M 上的 (光滑) 向量场.



注 和一般的截面一样, 光滑向量场也是一个 $C^{\infty}(M)$ -模; 同理可定义在开集 $U \subset M$ 上的 (光滑) 向量场.

正如截面的光滑性可以由其所表示为标架的系数决定, 光滑向量场也有借助系数、光滑函数的等价刻画.

¶ 借助系数刻画光滑性

取 M 的坐标卡 (U, ϕ) , 则 TM 自然有一组关于 U 的光滑标架 (直接考虑标架 $(U, \phi), (TU, \tilde{\phi})$, 根据欧氏空间情形, 其光滑性是显然的)

$$\partial_1, \dots, \partial_n, \quad \partial_i|_p = (d\phi_p)^{-1}(\partial_{r^i}|_{\phi(p)}),$$

因此任意 X_p 都可以表示为基的 $\mathbb{R}$ -线性组合

$$X_p = \sum_{i=1}^n c^i(X_p) \partial_i|_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \partial_i|_p,$$

根据上一节的命题3.3, $X: p \mapsto X_p$ 为光滑向量场当且仅当每个系数 c^i 光滑, 而 $a^i = c^i \circ X$, 因此 c^i 光滑时 a^i 光滑, 反之若 a^i 光滑, 则对任意 $p \in U$ 有

$$\tilde{\phi} \circ X(p) = (\phi(p), d\phi_p(X_p)) = (\phi(p), a^1(p), \dots, a^n(p)),$$

因此 X 是光滑向量场, 进而可得如下结论:

命题 3.7 (光滑向量场: 标架系数刻画)

设 X 是流形 M 上的向量场, 则下述等价

1. X 是光滑向量场.
2. M 有一族 (光滑) 图册, 使得对其中任意坐标卡 (U, ϕ) , $X = \sum_{i=1}^n a^i \partial_i$, 系数 a^i 都光滑.
3. 对 M 的任意坐标卡 (U, ϕ) , $X = \sum_{i=1}^n a^i \partial_i$, 系数 a^i 都光滑.

证明 $1 \Rightarrow 3$: 同上面的讨论.

$3 \Rightarrow 2$: 显然.

$2 \Rightarrow 1$: 根据上面的讨论, X 在每个 U 上光滑, 因此在 M 上光滑.

¶ 借助光滑函数刻画光滑性

在讨论切空间时, 我们就已经建立了“几何切向量”与“导子”之间的对应关系, 任何切向量 X_p 都是一个导子, 即对任意 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p),$$

每个向量场都可以诱导一个 $C^\infty(M)$ 上的映射:

$$X: f \mapsto Xf, \quad Xf(p) = X_p(f),$$

并且这种意义下的向量场也具有导子性:

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p) = (fXg + gXf)(p).$$

由此可以给出光滑性的第三种刻画.

命题 3.8 (光滑向量场: 导子刻画)

设 M 为光滑流形, 下述等价

- X 为 M 上的光滑向量场.
- X 为 M 上向量场, 并且对任意 $f \in C^\infty(M)$, $Xf \in C^\infty(M)$.
- X 是 $C^\infty(M)$ 上取值于自身的导子.

证明 $1 \Leftrightarrow 2$: 对任意 $p \in M$, 取坐标卡 (U, ϕ) , 设 $\partial_1, \dots, \partial_n$ 为其上的自然标架, 则 $X = \sum_{i=1}^n a^i \partial_i$, 因此 $(\partial_i f$ 为 U 上的光滑函数)

$$Xf = \sum_{i=1}^n a^i \partial_i f,$$

故 Xf 光滑 $\forall f \in C^\infty(M) \Leftrightarrow$ 每个 a^i 光滑, 即 X 光滑.

2 $\Rightarrow$ 3: 显然.

3 $\Rightarrow$ 2: X 为取值于 $C^\infty(M)$ 的导子说明 $Xf \in C^\infty(M)$. 对任意 $p \in M$, 定义

$$X_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_p(f) = Xf(p),$$

容易验证 X_p 是 $C^\infty(M)$ 上取值 $\mathbb{R}$ 的导子, 即为 p 处的切向量, 因此 X 为 M 上的向量场.

3.4 积分曲线

回忆: 光滑映射 $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ 称为流形上的一条 (光滑) 曲线, 任意 $t_0 \in (a, b)$ 处的速度向量定义为

$$\gamma'(t_0) := d\gamma_{t_0}(\partial_t|_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

由于给定任意点 p 以及该点处的切向量 X_p , 都存在曲线 γ 使得 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = X_p$. 给定光滑向量场 X , 如果一条曲线在每一点的速度向量恰好与 X 指定的切向量相同, 则称之为一条积分曲线.

定义 3.10 (积分曲线)

设 X 为流形 M 上的光滑向量场, 若光滑曲线 $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ 满足 $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}, \forall t \in (a, b)$, 则称之为 X 上的一条积分曲线.



注 沿用流形上曲线的语言, 仍不妨设 $0 \in (a, b)$, $p = \gamma(0)$ 称为曲线的起点.

例 3.3

- 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的坐标向量场 $X = \partial_{x^1}$, 则 X 的积分曲线是平行于 x^1 -轴的直线. 对任意 $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, 曲线

$$\gamma(t) = (c_1 + t, c_2, \dots, c_n), \quad t \in \mathbb{R}$$

都是 X 的积分曲线. 更一般地, 向量场 $\tilde{X} = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x^i}$ 的积分曲线为

$$\gamma(t) = (c_1 + a_1 t, \dots, c_n + a_n t).$$

注 虽然 $\bar{\gamma}(t) = (c_1 + 2t, c_2, \dots, c_n)$ 与 γ 图像相同, 但 $\bar{\gamma}'(t) = 2\frac{\partial}{\partial x^1} \neq X_{\gamma(t)}$, 因此它不是 X 的积分曲线.

- 若 $X = 0$, 则 M 上的常曲线 $e_q(t) \equiv q$ 是 X 的经过 q 的积分曲线.
- 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场 $X = x\partial_y - y\partial_x$, 记其积分曲线为 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, 则

$$x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} = \gamma'(t) = X_{\gamma(t)} = x(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} - y(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)},$$

即

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t),$$

该方程组 (满足初值 $\gamma(0) = (a, b)$) 的解为

$$x(t) = a \cos t - b \sin t, \quad y(t) = a \sin t + b \cos t,$$

其图像为平面上以原点为圆心的圆周, 以角度 (逆时针) 为参数化.

由上例可以看出, 积分曲线指 “参数曲线”, 相同几何图像的不同参数化也对应了不同的曲线. 一般曲线的重新参数化不再是积分曲线, 但线性参数化依然可以生成积分曲线.

命题 3.9 (线性重新参数化)

设 $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ 为向量场 X 的积分曲线, 则

1. 令 $I_c = (a + c, b + c)$, 则

$$\gamma_c: I_c \rightarrow M, \quad \gamma_c(t) = \gamma(t + c)$$

是 X 的积分曲线.

2. 令 $I^c = (ac, bc)$ ($c \neq 0$), 则

$$\gamma^c : I^c \rightarrow M, \quad \gamma^c(t) = \gamma(ct)$$

是 $X^a := aX$ 的积分曲线.



求给定光滑向量场的积分曲线往往与解对应的常微分方程组挂钩, 因此微分方程理论有助于我们进一步讨论积分曲线.

3.4.1 局部坐标卡中的常微分方程组

首先给出一个易证的引理

引理 3.3

设 X 为 M 上的光滑向量场, 则在坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 上有 $X = \sum_{i=1}^n X(x^i) \partial_i$.



设 γ 为 X 的积分曲线, 若要研究在给定点 $p = \gamma(0)$ 附近的方程 $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$, 可取 p 处的坐标卡 $(u, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, 借助坐标映射可将 $\gamma(t)$ 转化为

$$\phi \circ \gamma(t) = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^n(\gamma(t))) = (y^1(t), \dots, y^n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

根据引理, 在 U 中有

$$\gamma'(t) = d\gamma_t(\partial_t|_{\gamma(t)}) = \sum_{i=1}^n d\gamma_t(\partial_t|_{\gamma(t)})(x^i) \partial_i = \sum_{i=1}^n (x^i \circ \gamma)'(t) \partial_i = \sum_{i=1}^n (y^i)'(t) \partial_i,$$

因此方程 $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ 变为

$$\sum_{i=1}^n (y^i)'(t) \partial_i = \sum_{i=1}^n X^i(\gamma(t)) \partial_i = X^i \circ \phi^{-1}(y^1(t), \dots, y^n(t)) \partial_i,$$

积分曲线方程转化为了如下关于函数 $y^1, \dots, y^n$ 的常微分方程组

$$\begin{cases} (y^1)'(t) = X^1 \circ \phi^{-1}(y^1, \dots, y^n), \\ (y^2)'(t) = X^2 \circ \phi^{-1}(y^1, \dots, y^n), \\ \dots\dots\dots \\ (y^n)'(t) = X^n \circ \phi^{-1}(y^1, \dots, y^n). \end{cases}$$

带有初值 $\phi \circ \gamma(0) = (y^1(0), \dots, y^n(0))$. 回顾常微分方程组的基本定理:

定理 3.1 (一阶常微分方程组的基本定理)

设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 且 $F = (F^1, \dots, F^n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ 光滑, 考虑初值问题

$$\begin{cases} (y^i)' = F^i(y^1(t), \dots, y^n(t)), & i = 1, \dots, n \\ y^i(t_0) = c^i, & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

则有

1. 存在性: 对任意 $t_0 \in \mathbb{R}, c_0 \in V$, 存在开邻域 $I_0 \ni t_0, V_0 \ni c_0$, 使得对任意 $c = (c^1, \dots, c^n) \in V_0$, 上述方程组在 $t \in I_0$ 上有光滑解 $y_c(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t)) \in V$.
2. 唯一性: 若 y_1, y_2 分别为上述方程组在 $t \in I_0, t \in J_0$ 上的解, 则在 $t \in I_0 \cap J_0$ 上有 $y_1 = y_2$.
3. 光滑性: 1 中的解函数 $Y(c, t) = y_c(t)$ 在 $(c, t) \in V_0 \times I_0$ 上光滑.



由此可得

定理 3.2 (积分曲线的局部存在性/唯一性/光滑性)

设 X 为流形 M 上的光滑向量场, 则对任意 $p \in M$, 存在邻域 $U_p, \varepsilon_p > 0$ 和光滑映射

$$\Gamma : (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p \rightarrow M$$

使得对任意 $q \in U_p$, 曲线

$$\gamma_q : (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \rightarrow M, \quad \gamma_q(t) := \Gamma(t, q)$$

是 X 的满足 $\gamma(0) = q$ 的积分曲线. 此外, 这个积分曲线在下述意义下唯一: 若 $\sigma : (a, b) \rightarrow M$ 是 X 的另一条以 q 为起点的积分曲线, 则在 $(a, b) \cap (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$ 上 $\sigma = \gamma_q$.

**3.4.2 向量场的完备性**

借助积分曲线的局部唯一性, 可以定义其极大存在区间.

定义 3.11 (极大存在区间)

称积分曲线 $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ 是极大的, 若其不能延拓到更大的区间上, 此时 (a, b) 称为其极大存在区间, γ_p 称为以 $\gamma(0)$ 为起点的极大积分曲线.



注 这里的延拓是指存在定义区间更大的积分曲线, 根据唯一性它们在小区间上相等, 同理可知以任意 $p \in M$ 为起点的极大积分曲线是唯一的.

定义 3.12 (完备向量场)

设 X 为 M 上的光滑向量场, 若对任意 $p \in M$, 满足 $\gamma(0) = p$ 的积分曲线 γ 的极大存在区间均为 $\mathbb{R}$, 则称 X 完备.



例 3.4 不完备的向量场 考虑 $\mathbb{R}$ 上的向量场 $X = x^2 \partial_x$, 设 $\gamma(t) = x(t)$ 为其积分曲线, 则

$$x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} = \gamma'(t) = X_{\gamma(t)} = x^2(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)},$$

即得方程 $x'(t) = x^2$, 其解为

$$x = -\frac{1}{t + C},$$

若设 $\gamma(0) = 2$ 则 $c = -1/2$, 其极大存在区间为 $(-\infty, 1/2)$, 因此 X 是不完备的.

根据积分曲线的局部存在性定理, 在积分曲线的任意 $\gamma(t)$ 处, 都可以将其定义域向前延伸到某个 $t + \varepsilon$ 处, 但这种延伸的幅度可能越来越小, 导致某些积分曲线的极大存在区间不为 $\mathbb{R}$ (或者说对应的向量场不完备). 如果对每一点可以找到一致的 ε_0 , 使得定义域可以延伸到 $t + \varepsilon_0$ 处, 那么极大存在区间自然是 $\mathbb{R}$, 对于这种情形, 紧性往往是一个很好的条件.

当 $X_p = 0$ 时, M 上任意常曲线都是 X 的积分曲线, 因此只需要关注非零点情形, 下面证明具有紧支集的向量场是完备的.

定理 3.3 (紧支向量场完备)

光滑流形 M 上任意具有紧支集的光滑向量场 X 完备.



注 特别当 M 为紧流形时, 其上任意光滑向量场完备.

证明 记 $C = \text{supp } X$, 只需考虑 $q \in C$, 易知从 q 出发的积分曲线始终在 C 中, 根据局部存在性, 有 $I_q = (-\varepsilon_q, \varepsilon_q)$, 邻域 U_q 和光滑映射 $\Gamma : I_q \times U_q \rightarrow C$ 使得对任意 $p \in U_q$, $\gamma_p(t) = \Gamma(t, p)$ 是 X 的由 p 出发的积分曲线. 由于紧集 $C \subset \bigcup_{q \in C} U_q$, 可取有限子覆盖 $\{U_{q_1}, \dots, U_{q_N}\}$, 令

$$I = \bigcap_{k=1}^N I_{q_k} := (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

则对任意 $q \in C$, 存在从 q 出发的积分曲线 $\gamma_q: I \rightarrow C$.

下证 γ_q 的极大存在区间 $J_q = \mathbb{R}$. 若不然不妨设 $\sup J_q = c < \infty$, 对于 $p := \gamma_q(c - \varepsilon_0/2)$, 存在从 p 出发的积分曲线 $\gamma_p: I \rightarrow M$, 由唯一性, $\gamma_p(t) = \gamma_q(t + c - \varepsilon_0/2)$, 因此 J_q 定义域可延拓到 $c + \varepsilon_0/2 > c$, 矛盾.

3.4.3 流映射

设 X 为流形 M 上的向量场, 则从任意 $p \in M$ 出发, 存在唯一的极大积分曲线 $\gamma_p: J_p \rightarrow M$, 将其合在一起可得映射

$$\Phi: \mathcal{M} = \{(t, p) : p \in M, t \in J_p\} \rightarrow M, \quad \Phi(t, p) = \gamma_p(t).$$

容易证明如下引理:

引理 3.4 (局部流的加性)

对于 M 上的光滑向量场 X , 若 $t, s, t+s \in J_p$, 则 $\gamma_{\gamma_p(s)}(t) = \gamma_p(t+s)$.

证明 固定 s , 则 $\gamma_1(t) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$, $\gamma_2(t) = \gamma_p(t+s)$ 都是从 $\gamma_p(s)$ 出发的 s 的积分曲线, 由唯一性可知二者相等. 如果 Φ 光滑, 则对任意固定的 $t \in \mathbb{R}$ 有光滑映射

$$\phi_t: M_t = \{p \in M : t \in J_p\} \rightarrow M, \quad \phi_t(p) = \Phi(t, p),$$

借助 ϕ , 上述引理实际上指

$$\phi_t \circ \phi_s(p) = \Phi(t, \Phi(s, p)) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t) = \gamma_p(t+s) = \Phi(t+s, p) = \phi_{t+s}(p),$$

即 $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

定义 3.13 (向量场生成的局部流)

设 X 为 M 上的光滑向量场, 称上面的映射 $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow M$ 为 X 生成的局部流. 若 X 完备, 则称 $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ 为 X 生成的流 (整体流).

例 3.5

- $\mathbb{R}^n$ 中向量场 $X = \partial_{r^1}$ 生成的流是平移

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x^1, \dots, x^n) \mapsto (t + x^1, x^2, \dots, x^n),$$

更一般地, $\mathbb{R}^n$ 中常向量场 $X = \sum_{i=1}^n c^i \partial_{r^i}$ 生成的流是

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x^1, \dots, x^n) \mapsto (c^1 t + x^1, \dots, c^n t + x^n).$$

- 若将 $\mathbb{R}^2$ 等同于 $\mathbb{C}$, 则由向量场 $X = x\partial_y - y\partial_x$ 生成的流是逆时针旋转

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (t, z) \mapsto e^{it}z.$$

下面证明, 光滑向量场生成的流是光滑的.

定理 3.4 (流映射的光滑性)

设 X 为 M 上的光滑向量场, 则其生成的流 $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow M$ 是光滑的.

证明 任取 $(t_0, p) \in \mathcal{M}$, 下证 Φ 在该点 (的一个开邻域内) 光滑, 分为两步.

【STEP 1. 证明 Φ 在 $(0, p)$ 的邻域 $I \times U$ 中光滑】

对任意 $q \in M$, 存在邻域 U_q 和区间 $I_q = (-\varepsilon_q, \varepsilon_q)$ 使得 $\Phi|_{I_q \times U_q}$ 光滑. $t_0 \in J_p$ 说明存在 $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset J_p$, 记紧集 $K = \gamma_p([-\varepsilon, t_0 + \varepsilon])$, 则存在 $U_{p_1}, \dots, U_{p_m}$ 覆盖 K , 记

$$U = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_m}, \quad I = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) = I_{p_1} \cap \dots \cap I_{p_m},$$

则 U, I 分别为 $K, 0$ 的开邻域, 并且 $\Phi|_{I \times U}$ 光滑, 特别对任意 $s_0 \in I$, ϕ_{s_0} 光滑.

【STEP 2. 借助可加性, 将 (t_0, p) 处的光滑性 “转移” 到 $I \times U$ 中】

取 N 充分大使得 $s_0 := t_0/N \in I$, 令 $U_1 = U$, 迭代地定义开集

$$U_{k+1} = \phi_{s_0}^{-1}(U_k) \cap U, \quad k = 1, \dots, N,$$

则每个 $\phi_{s_0}|_{U_k} : U_k \rightarrow U_{k-1}$ 光滑, 由于

$$\Phi(s_0, \Phi(s_0, \dots, \Phi(s_0, \Phi(0, p)) \dots)) = \Phi(t_0, p) = \gamma_p(t_0) \subset K \subset U,$$

因此 $(0, p) \in \Phi|_{I \times U}^{-1}(U_{N+1})$, 进而存在 $(0, p)$ 的邻域 $I_0 \times U_0 \subset \Phi|_{I \times U}^{-1}(U_{N+1})$ 使得 $\Phi|_{I_0 \times U_0}$ 光滑, 而 Φ 是如下光滑映射 $((t_0 + I_0) \times U_0 \rightarrow I_0 \times U_0 \rightarrow U_{N+1} \rightarrow U_N \rightarrow \dots \rightarrow U_1)$ 的复合:

$$(t, p) \mapsto (t - t_0, p) \mapsto \Phi(t - t_0, p) \mapsto \Phi(t - t_0 + s_0, p) \mapsto \dots \mapsto \Phi(t, p),$$

因此 Φ 在 $(t_0 + I_0) \times U_0$ 上光滑, 得证.

¶ 单参数微分同胚群

对于向量场的流 Φ , 其每一刻的映射 ϕ_t 满足:

- $\phi_0 = \text{Id}_M$.
- 当 $t, -t \in \bigcap_p J_p$ 时, $\phi_t : M \rightarrow M$ 为微分同胚.
- 进而若 X 完备, 则 $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$, 此时对任意 $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t 都是 M 到自身的微分同胚.

由此可得

引理 3.5 (流的群性质)

若 X 是 M 上的完备向量场, 则光滑映射族 $\{\phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ 是 M 的微分自同胚群 $\text{Diff}(M)$ 的子群.

根据上述引理, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), t \mapsto \phi_t$ 可以视为实数加法群到微分自同胚群的同态.

定义 3.14 (单参数微分同胚群)

若光滑映射 $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ 诱导的映射 $t \mapsto \phi_t = \Phi(t, -)$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\text{Diff}(M)$ 的群同态, 则称映射族 $\{\phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ 为 M 的一个单参数微分同胚子群.

一方面, 流形上任意完备向量场 X 都生成了一个单参数微分同胚子群; 反之若光滑映射 $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ 可以诱导一个单参数微分同胚子群, 则可以定义出 M 上的一个向量场 X 满足

$$X_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(p),$$

并且容易验证

- Φ 光滑说明 X 光滑.
- $\gamma_p(t) := \Phi(t, p)$ 恰好为 X 的积分曲线, 因此 X 完备.
- Φ 也恰好是 X 生成的流.

换句话说, 流可以“重现”向量场, 向量场 X 也被称为单参数微分同胚子群 $\{\phi_t\}$ (或者流 Φ) 的无穷小生成元.

3.5 向量场的李代数结构

3.5.1 向量场的李括号

设 X, Y 为 M 上的光滑向量场, 若将其视为 $C^\infty(M)$ 上取值于自身的导子, 则其复合 $XY = X \circ Y$ 是 $\mathbb{R}$ -线性映射, 但不满足导子性:

$$XY(fg) = X((Yf)g + fYg) = (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg),$$

影响因素在于 $(Yf)(Xg), (Xf)(Yg)$ 两项, 而它们的和关于 X, Y 是对称的, 计算它们的交换可得

$$YX(fg) = Y((Xf)g + fXg) = (YXf)g + (Xf)(Yg) + (Yf)(Xg) + f(YXg),$$

将二者作差, 可恰好消去影响项, 若记二者的 **Lie 括号** $[X, Y] = XY - YX$ 则

$$[X, Y](fg) = ([X, Y]f)g + f([X, Y])g,$$

因此 $[X, Y]$ 还是 $C^\infty(M)$ 上的导子, 并且容易证明:

引理 3.6 (光滑向量场的李括号还是光滑向量场)

设 X, Y 为 M 上的光滑向量场, 则 $[X, Y]$ 还是 M 上的光滑向量场.



证明 已知 $[X, Y]$ 为导子, 根据光滑性的导子刻画, 只需证明 $[X, Y]$ 取值于自身, 而这根据 X, Y 的光滑性是显然的.

进而, 对任意 $p \in M$, $[X, Y]$ 在每一点自然指定切向量

$$[X, Y]_p = (X_p Y - Y_p X).$$

因此, 李括号给出了 M 的光滑向量场 $\Gamma(TM)$ 上一个二元运算, 容易验证它满足:

命题 3.10 (李括号的性质)

- $\mathbb{R}$ -双线性性: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.
- 反对称性: $[X, Y] = -[Y, X]$.
- Jacobi 等式: $\sum_{cyc} [X, [Y, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.



定义 3.15 (Lie 代数/李代数)

若 k -线性空间 V 有二元运算 $[-, -]: V \times V \rightarrow V$, 满足

- k -双线性性: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.
- 反对称性: $[X, Y] = -[Y, X]$.
- Jacobi 等式: $\sum_{cyc} [X, [Y, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

则称 $(V, [-, -])$ 是一个 Lie 代数, $[-, -]$ 称为 Lie 括号.



注 虽然向量场的 Lie 代数结构是结合的, 但一般的 Lie 代数并不蕴含结合性, 因此 **Lie 代数一般不是代数**. 但反之任何 k -代数 A 可以借助 Lie 括号给出一个 Lie 代数结构.

定义 3.16 (Lie 代数的导子)

设 V 为 Lie 代数, 若线性算子 $D: V \rightarrow V$ 满足

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY], \quad \forall X, Y \in V,$$

则称 D 为 V 上的一个导子.



例 3.6 考虑 Lie 代数 V 上的线性算子 $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$, 则 Jacobi 等式表明

$$\mathcal{L}_X([Y, Z]) = [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] = [\mathcal{L}_X(Y), Z] + [Y, \mathcal{L}_X(Z)],$$

因此它是一个导子.

3.5.2 向量场的推出

设 $F: M \rightarrow N$ 为光滑映射, 则其微分 $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 给出了一个线性映射, 对任意 $X_p \in T_p N$, 称 $= dF_p(X_p)$ 为 X_p (在 p 处) 的**推出**, 这种推出一般不能直接对向量场 X 定义 $\bar{X}_{F(p)} := dF_p(X_p)$, 原因在于:

- 若 F 不是满射, 则某些 $q \in N$ 不在 F 的像集中, 因此 $\bar{X}$ 不能在全局定义.
- 可能存在 $p_1, p_2 \in M$ 使得 $F(p_1) = F(p_2)$ 但 $dF_{p_1}(X_{p_1}) \neq dF_{p_2}(X_{p_2})$ (例如考虑 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的投影映射).

不过当 F 为微分同胚时, 以上问题将不复存在. 若 F 确实可以借助“推出”由 $X \in \Gamma(TM)$ 定义出一个向量场 $\bar{X} \in \Gamma(TN)$, 则称它们**相关**.

定义 3.17 (相关向量场)

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, X 为 M 上的向量场, 若存在 N 上的向量场 $\bar{X}$ 使得 $\bar{X}_{F(p)} = dF_p(X_p)$, 则称 $X, \bar{X}$ 是 F -相关的.



注 若 F 为微分同胚, 则 $\bar{X} = F_*X$.

命题 3.11 (F -相关的等价刻画)

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, 则向量场 $X, \bar{X}$ 是 F -相关的当且仅当对任意 $g \in C^\infty(M)$ 有

$$X(g \circ F) = (\bar{X}g) \circ F.$$



证明 注意到二者 F -相关当且仅当

$$X(g \circ F)(p) = X_p(g \circ F) = dF_p(X_p)(g) = \bar{X}_{F(p)}(g) = (\bar{X}g)(F(p)).$$

推论 3.3 (Lie 括号的 F -相关)

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, 若光滑向量场 X, Y 分别与 $\bar{X}, \bar{Y}$ 是 F -相关的, 则 $[X, Y]$ 与 $[\bar{X}, \bar{Y}]$ 是 F -相关.



证明 对任意 $g \in C^\infty(M)$ 有

$$\begin{aligned} [X, Y](g \circ F) &= XY(g \circ F) - YX(g \circ F) \\ &= X((\bar{Y}g) \circ F) - Y((\bar{X}g) \circ F) \\ &= (\bar{X}\bar{Y}g) \circ F - (\bar{Y}\bar{X}g) \circ F \\ &= ([\bar{X}, \bar{Y}]g) \circ F. \end{aligned}$$

推论 3.4

设 $F: M \rightarrow N$ 为微分同胚, 则对任意 $X, Y \in \Gamma(TM)$ 有

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y].$$

**3.5.3 李导数**

对于 M 上的光滑向量场 X , 由于对任意 $p \in M$, 存在 $p, 0$ 的邻域 U_p, I_p 使得局部流 Φ 在 $I_p \times U_p$ 上有定义且光滑, 类似微积分, 可以定义“函数 f 沿该流的导数”, 即李导数.

定义 3.18 (函数关于向量场的 Lie 导数)

设 X 为 M 上的光滑向量场, Φ 为其生成的局部流, 则定义 $f \in C^\infty(M)$ 关于 X 的 Lie 导数为

$$\mathcal{L}_X(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f \left(= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* f - f}{t} \right).$$



注 其中 $\phi_t^* f = f \circ \phi_t$.

事实上函数关于向量场的 Lie 导数就是 X 作为导子在 $C^\infty(M)$ 上的作用.

命题 3.12 (函数 Lie 导数的计算)

对任意 $X \in \Gamma(TM)$ 以及 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f).$$



证明 设 $\gamma_p(t)$ 为 X 的积分曲线, 则当 t 充分小时 $\phi_t^* f(p) = f(\phi_t(p)) = f(\gamma_p(t))$, 因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma_p(t)) \\ &= d(f \circ \gamma_p)(\partial_t|_0) = df_p \circ d(\gamma_p)_0(\partial_t|_0) = df_p(X_p) = Xf(p).\end{aligned}$$

函数的 Lie 导数衡量了 f 沿 X 方向的变化率, 进一步, 对任意光滑向量场 $Y \in \Gamma(TM)$, 可以讨论 Y 沿 X 方向的变化率. 基本想法是计算极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi_t(p)} - Y_p}{t}$, 但 $Y_{\phi_t(p)}$ 不是 p 处的切向量, 因此作差是无意义的. 为了修正, 需要将 $Y_{\phi_t(p)}$ 首先用映射 $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ “推出” 为 p 处的切向量 $(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} \in T_p M$, 再作差计算变化率.

定义 3.19 (向量场关于向量场的 Lie 导数)

定义 $Y \in \Gamma(TM)$ 沿向量场 $X \in \Gamma(TM)$ 的 Lie 导数为

$$\mathcal{L}_X(Y) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} \left(= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} - Y_p}{t} \right).$$



虽然定义更复杂, 但它实际上是 Lie 括号的计算.

命题 3.13 (向量场 Lie 导数的计算)

设 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 则

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y].$$



证明 对任意 $p \in M, f \in C^\infty(M)$ 有

$$\begin{aligned}(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} f &= Y_{\phi_t(p)} (f \circ \phi_{-t}) \\ &= Y(f \circ \phi_{-t})(\phi_t(p)) = \phi_t^* Y(f \circ \phi_{-t})(p) = \phi_t^* Y(\phi_{-t}^* f)(p),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(Y)f(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* Y \phi_{-t}^* f(p) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* Y f(p) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y \phi_{-t}^* f(p) \\ &= XYf(p) - YXf(p) = [X, Y]f(p).\end{aligned}$$

注 证明过程来自火箭讲义, 正确性未知.

第4章 李群与李代数

4.1 李群

李群的定义与例子

简单来说, 李群就是赋有光滑流形结构的群, 并且两结构相容.

定义 4.1 (Lie 群)

设 G 为群, 若 G 上有光滑流形结构, 且群乘法

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

是光滑映射, 则称 G .

注

1. Lie 群的定义与拓扑群有相似之处, 后者是具有相容拓扑结构的群, 并且乘法、取逆都连续. 这里没有要求取逆光滑, 因为我们将证明, 只要乘法运算光滑, 则取逆也光滑.
2. 从范畴的角度而言, Lie 群是光滑流形范畴中的群对象 (正如群是集合范畴中的群对象, 拓扑群是拓扑空间范畴中的群对象), 它位于代数、几何、分析的交界处.
3. 如果 G 是带有拓扑流形, 结构相容的群, 是否具有光滑结构使之成为 Lie 群? 这是 Hilbert 第五问题, 最终于 1950 年被 A. Gleason 和 D. Montgomery 解决, 答案是肯定的.

例 4.1

- $(\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{R}^*, \times), (S^1, \times)$ 是 Lie 群.
- Lie 群的乘积是 Lie 群, 例如 n 维环面 $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 维 Lie 群.
- 许多矩阵群都是 Lie 群, 例如 $GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}), O_n, U_n$, 事实上, 任何紧 Lie 群都可被实现为矩阵 Lie 群.
- S^3 上也有李群结构: 将 $\mathbb{R}^4$ 等同于 $\mathbb{R}[Q_8]$ (即 $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$), 将这一群结构限制在 S^3 上可给出一个 Lie 群结构. 特别地, 各维球面上只有 S^0, S^1, S^3 上有 Lie 群结构.

群上有两种自然的映射, 左乘 $L_a(g) = ag$ 与右乘 $R_b(g) = gb$, 可以对于 Lie 群而言, 这两种映射都是微分同胚.

命题 4.1 (左乘与右乘是微分同胚)

设 G 为 Lie 群, 对任意 $a \in G$, 左乘 L_a 与右乘 R_a 都是微分同胚.

证明 考虑“切片”嵌入 (它们光滑)

$$j_a : G \hookrightarrow G \times G, g \mapsto (a, g),$$

$$i_b : G \hookrightarrow G \times G, g \mapsto (g, b),$$

则 $L_a = \mu \circ j_a, R_b = \mu \circ i_b$, 因此它们光滑, 此外 $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, R_b^{-1} = R_{b^{-1}}$, 因此其逆也光滑, 故为微分同胚.

注 群的结合律实际上就是左乘与右乘的交换性, 即 $L_a R_b = R_b L_a$.

借助左乘, 可以刻画 Lie 群的切丛.

命题 4.2 (李群的切丛平凡)

设 G 为 m 维李群, 则 $TG \cong G \times \mathbb{R}^m$.

证明 将 $\mathbb{R}^m$ 等同于 $T_e G$, 考虑映射

$$\phi : G \times T_e G \rightarrow TG, \quad (g, v) \mapsto (g, (dL_g)_e(v)),$$

其逆为 $\phi^{-1}(g, u) = (g, (dL_{g^{-1}})_g(u))$, 容易验证 ϕ, ϕ^{-1} 都是光滑的.

注 细节可参考 **Let G be a Lie group, show that there is a diffeomorphism $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$**

李群运算的微分

借助左乘与右乘, 可以计算出乘法的微分.

命题 4.3 (李群乘法的微分)

乘法映射 $\mu : G \times G \rightarrow G$ 的微分为

$$d\mu_{(a,b)}(X_a, Y_b) = (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b), \quad \forall (X_a, Y_b) \in T_a G \times T_b G \cong T_{(a,b)}(G \times G).$$

注 特别地, 在单位元处 $d\mu_{(e,e)}(X_e, Y_e) = X_e + Y_e$.

证明 直接验证, 对任意 $f \in C^\infty(G)$ 有

$$\begin{aligned} d\mu_{(a,b)}(X_a, Y_b)(f) &= (X_a, Y_b)(f \circ \mu) = X_a(f \circ \mu \circ \iota_b) + Y_b(f \circ \mu \circ j_a) \\ &= X_a(f \circ R_b) + Y_b(f \circ L_a) \\ &= (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b). \end{aligned}$$

其中 $\iota_b : G \rightarrow G \times G, g \mapsto (g, b); j_a : G \rightarrow G \times G, g \mapsto (a, g)$ 分别为 $G \times G$ 中两个位置向其中的嵌入 (这里用到了乘积流形切空间的结构).

下面证明李群中乘法运算的光滑性蕴含取逆的光滑性, 同时计算其微分.

命题 4.4 (李群取逆的光滑性与微分)

对任意李群 G , 取逆运算 $i : G \rightarrow G$ 是光滑的, 并且

$$di_a(X_a) = -(dL_{a^{-1}})_e \circ (dR_{a^{-1}})_a(X_a), \quad \forall X_a \in T_a G.$$

注 特别地, 在单位元处 $di_e(X_e) = -X_e$.

证明 首先考虑光滑映射

$$f : G \times G \rightarrow G \times G, \quad (a, b) \mapsto (a, ab),$$

其微分为

$$df_{(a,b)} : T_a G \times T_b G \rightarrow T_a G \times T_{ab} G, \quad (X_a, Y_b) \mapsto (X_a, (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b)),$$

由于 L_a, R_b 都是微分同胚, 因此 f 为局部微分同胚, 但 f 显然可逆, 因此它是微分同胚, 进而有微分同胚

$$f^{-1} : G \times G \rightarrow G \times G, \quad (a, b) \mapsto (a, a^{-1}b),$$

注意到

$$i = \pi_2 \circ f^{-1} \circ \iota_e : G \rightarrow G \times G \rightarrow G \times G \rightarrow G, \quad a \mapsto (a, e) \mapsto (a, a^{-1}) \mapsto a^{-1},$$

因此 i 是光滑的, 进一步计算微分得到

$$\begin{aligned} di_a(X_a) &= (d\pi_2)_{(a,a^{-1})} \circ (df^{-1})_{(a,e)} \circ (d\iota_e)_a(X_a) \\ &= (d\pi_2)_{(a,a^{-1})} \circ (df^{-1})_{(a,e)}(X_a, 0) \\ &= (d\pi_2)_{(a,a^{-1})}(X_a, -(dL_{a^{-1}})_e \circ (dR_{a^{-1}})_a(X_a)) \\ &= -(dL_{a^{-1}})_e \circ (dR_{a^{-1}})_a(X_a). \end{aligned}$$

4.2 李代数

定义 4.2 (李代数)

设 k 为零特征域, $\mathfrak{g}$ 为 k -线性空间, 若其上定义了李括号 $[-, -]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ 满足

1. 双线性性.
2. 反对称性: $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathfrak{g}$.
3. Jacobi 恒等式: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

则称 $\mathfrak{g}$ 为一个李代数, 它作为 k -线性空间的维数称为李代数的维数.



注 Jacobi 恒等式的一个等价形式是 $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

设 $x_1, \dots, x_n$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基, $[x_i, x_j] = C_{ij}^k x_k$, 其中 C_{ij}^k 称为 $\mathfrak{g}$ 关于这一组基的**结构常数**, 根据定义可知它满足

$$\begin{cases} C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0, & \forall i, j, k = 1, \dots, n. \\ C_{jk}^m C_{im}^l + C_{ki}^m C_{jm}^l + C_{ij}^m C_{km}^l = 0, & \forall i, j, k, l = 1, \dots, n. \end{cases}$$

并且当确定 $\mathfrak{g}$ 的一组基后, 其上的李代数结构可以由结构常数完全刻画.

例 4.2 代数与李代数的张量积 设 K 为 k -交换结合代数, $\mathfrak{g}$ 为李代数, 则可定义 $\mathfrak{g}_K := K \otimes_k \mathfrak{g}$ 上的李括号

$$[a \otimes x, b \otimes y] := (ab) \otimes [x, y],$$

借助 K 的交换性、结合性容易验证李括号对应的反对称性与 Jacobi 恒等式, 进而 $\mathfrak{g}_K$ 为李代数. 特别当 $k = \mathbb{R}, K = \mathbb{C}$ 时, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**复化**.

定义 4.3 (李子代数 & 理想)

设 $\mathfrak{g}$ 为李代数, $\mathfrak{h}$ 为其子集.

- 若 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, 则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**李子代数**, 记为 $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$.
- 若 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, 则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**理想**, 记为 $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$.



注 对于 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, 定义 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \text{Span}([x, y] : x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b})$.

定义 4.4 (李代数同态)

设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 为李代数, 称 k -线性映射 $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 为李代数同态, 若

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$



命题 4.5 (李代数同态的核与像)

设 $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 为李代数同态, 则 $\text{Ker } \phi \triangleleft \mathfrak{g}, \text{Im } \phi \leq \mathfrak{h}$.



例 4.3 李代数的构造

1. 设 $\mathfrak{g}$ 为李代数, $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$, 考虑其商 $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, 可定义李括号 (理想保证其良定)

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] := [x, y] + \mathfrak{h}.$$

2. 对于一系列李代数 $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$, 考虑其笛卡尔积 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_n$, 可定义李括号

$$[(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)] = ([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]).$$

此外也可将其视为直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$, 这时 $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0 (i \neq j)$.

3. 若 $\mathfrak{g}$ 存在一系列子代数 $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ 满足 $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = \{0\}, [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0 (i \neq j), \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$, 则称 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ 的直和.

例 4.4 李代数的例子

- 设 V/k 为线性空间, 定义 $\mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V)$, 其上李括号为 $[\phi_1, \phi_2] = \phi_1\phi_2 - \phi_2\phi_1$; 由于 $V \cong k^n$ (设 $\dim V = n$), 因此 $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(k) = M_n(k)$, 其上李括号为两个方阵的交换子, $\dim \mathfrak{gl}(V) = n^2$.
- 若定义 $\mathfrak{sl}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \text{tr} A = 0\}$, 则它是 $\mathfrak{gl}_n(k)$ 的 $n^2 - 1$ 维李代数.
- 若定义 $\mathfrak{o}_n(k) = \{A \in M_n(k) : A + A^T = 0\}$, 则它是 $\mathfrak{gl}_n(k)$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维子代数.
- 若定义 $\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \{A \in M_{2n}(k), A^T J + JA = 0\}$, 则它是 $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$ 的 $2n^2 + n$ 维子代数.
- 设 M 为光滑流形, 则其上的向量场 $\mathfrak{X}(M)$ 是一个李代数.

定义 4.5 (导子)

设 A 为一个 k -代数, 若

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \quad \forall a, b \in A,$$

则称 D 为一个导子, A 上导子的全体记为 $\text{Der}(A)$.

注 容易验证对任意 $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ 有 $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1 \in \text{Der}(A)$, 进一步易得 $\text{Der}(A)$ 为李代数.

命题 4.6 (李代数的导子)

若 $\mathfrak{g}$ 为李代数, 则 $\text{Der}(\mathfrak{g})$ 也是李代数, 并且有同态

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto \text{ad}_x,$$

其中 $\text{ad}_x(y) = [x, y]$.

证明 根据 Jacobi 恒等式可得

$$\text{ad}_{[x,y]}(z) = [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = \text{ad}_x \text{ad}_y(z) - \text{ad}_y \text{ad}_x(z) = [\text{ad}_x, \text{ad}_y](z).$$

李代数的表示**定义 4.6 (李代数的表示)**

设 $\mathfrak{g}$ 为 k -李代数, V/k 为线性空间, 若存在李代数同态 $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 则称 (V, ϕ) 为 $\mathfrak{g}$ 的一个表示.

注

1. 上面的 $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 称为**伴随表示**.
2. 与群的表示类似, 李代数的表示也可以视为某种作用, 即将 V 视为 $\mathfrak{g}$ -模.
3. 与群的表示类似, 李代数的表示也可定义 $\mathfrak{g}$ -模同态、考虑子表示、商表示、直和、张量积等.

定义 4.7 (不可约与不可分解)

- 若表示 V 无非平凡子表示, 则称之不可约.
- 若表示 V 不能分解为子模的直和, 则称之不可分解.

注 不可约必然不可分解, 但反之未必.

定理 4.1 (Ado-Iwasawa)

对任意有限维实李代数 $\mathfrak{g}$, 存在有限忠实表示 $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

4.3 李群的李代数

李群 G 作为光滑流形, 其上的向量场全体 $\mathfrak{X}$ 是一个李代数, 下面讨论它的一个重要的李代数.

左不变向量场

定义 4.8 (左不变向量场)

设 G 为李群, $X \in \Gamma(TG)$, 若对任意 $a \in G$ 有 $dL_a(X) = X \circ L_a$, 则称 X 为 G 上的左不变向量场.

注

1. 由于 L_a 为微分同胚, 因此可以定义“推出向量场” $dL_a(X)$, 并且左不变意味着对任意 $b \in G$ 有 $(dL_a)_b(X_b) = X_{ab}$, 或者说对任意 $f \in C^\infty(G)$ 有 $dL_a(X)(f) = X(f \circ L_a) = Xf \circ L_a$.
2. 对任意 $X_e \in T_e G$, 可以定义出 G 上的一个向量场 $X_b := (dL_b)_e(X_e)$, 容易验证它是左不变的.

定理 4.2 (李群的李代数)

- (1) 李群 G 上的左不变向量场 X 是光滑的.
- (2) 李群 G 上的左不变向量场的全体构成一个李代数 $\mathfrak{g}$, 进一步有线性同构

$$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow T_e G, \quad X \mapsto X_e,$$

特别地, $\dim G = \dim \mathfrak{g}$.

注 $\mathfrak{g}$ 称为李群 G 的李代数 (它也是 $\Gamma(TG)$ 的李子代数), 由此可知取 $T_e G$ 的一组基 $X_e^1, \dots, X_e^n$, 可以通过左平移构造出 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $X^1, \dots, X^n$.

证明 (1) 设 X 是左不变的, 取光滑向量场 Y 使得 $Y_e = X_e$, 则

$$X_a = (dL_a)_e(X_e) = (dL_a)_e(Y_e) = d\mu_{(a,e)}(0, Y_e),$$

因此对任意 $f \in C^\infty(G)$ 有

$$(Xf)(a) = d\mu_{(a,e)}(0, Y_e)(f) = (0, Y)(f \circ \mu) \circ \iota_e(a) \in C^\infty(G),$$

其中 $\iota_e: G \rightarrow G \times G, a \mapsto (a, e)$, 因此 X 光滑.

(2) 设 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 容易验证

$$dL_a([X, Y])(f) = XY(f \circ L_a) - YX(f \circ L_a) = X(Yf \circ L_a) - Y(Xf \circ L_a) = [XY - YX](f) \circ L_a,$$

即 $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, 最后的线性同构是显然的.

根据上述命题, 给定李群 G , 求其李代数 $\mathfrak{g}$ 可遵循如下步骤:

1. 从 $T_e G$ 出发得到 $\mathfrak{g}$ 的线性空间结构.
2. 对于 $u, v \in T_e G$, 借助左平移构造左不变向量场 $U, V \in \mathfrak{g}$.
3. 计算 $[U, V] = UV - VU$, 回到 e 处得到 $[u, v]_{\mathfrak{g}} = [U, V](e)$ (即 $\mathfrak{g}$ 中的李括号).

例 4.5 李群上李代数的例子

- $\mathbb{R}^n$: $T_0 \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, 因此对任意 $v = v^i \partial_i|_0 \in T_0 \mathbb{R}^n$, 左平移可得 $V = v^i \partial_i \in \mathfrak{g}$, 其中任意两个元素可交换 (即李括号为零), 因此 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ (n 维平凡李代数).
- S^1 : 其中左平移即为旋转, 左不变向量场为 $\{a \partial_\theta\} \cong \mathbb{R}$ (一维平凡李代数).
- $GL_n(\mathbb{R})$: 首先 $\mathfrak{g} = T_I GL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$, 借助曲线容易计算 $(dL_A)_I = L_A$, 设 $A = a_{ij} \partial_{ij}|_I \in T_I GL_n(\mathbb{R})$, 则其左平移 (到 $X = (x_{ij})$) 的切向量为 $x^{ij} a_{jk} \partial_{ik}|_X$, 计算李括号可得 (注意 ∂ 是对 x 的偏导数)

$$[x^{ik} a_{kj} \partial_{ij}, x^{pr} b_{rq} \partial_{pq}] = x^{ik} a_{kj} b_{jq} \partial_{iq} - x^{ir} b_{rk} a_{kj} \partial_{ij} = x^{ij} (a_{kj} b_{jq} - b_{kj} a_{jq}) \partial_{ij},$$

因此李括号 $[A, B] = AB - BA$, 这说明 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

命题 4.7 (交换李群的李代数平凡)

若 G 为交换李群, 则其李代数 $\mathfrak{g}$ 是平凡的.

证明 G 交换说明取逆 $i: G \rightarrow G$ 为微分同胚, 并且 $di_e(v) = -v$ 说明对任意 $x, y \in T_e G$ 有

$$\begin{aligned} -[x, y] &= di_e[x, y] = di_e([X, Y](e)) \\ &= [di_e(x), di_e(y)] \\ &= [x, y], \end{aligned}$$

因此 $[x, y] = 0$.

对于李群同态 $\phi: G \rightarrow H$, $d\phi_e: T_e G \rightarrow T_e H$ 为线性映射, 对任意 $X_e \in T_e G$ 有 $d\phi_e(X_e) = Y_e \in T_e H$. 根据前面的同构关系, 借助左平移可以定义 $d\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 为

$$Y_h = (dL_h)_e(Y_e) = (dL_h)_e \circ d\phi_e(X_e), \quad \forall h \in H, X \in \mathfrak{g},$$

进而有如下结论:

定理 4.3 (李群同态 $\leadsto$ 李代数同态)

设 $\phi: G \rightarrow H$ 为李群同态, 则

- X 与 $Y = d\phi(X)$ 是 ϕ -相关的.
- $d\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 为李代数同态.



注 X, Y 为 ϕ -相关可等价于对任意 $f \in C^\infty(H)$ 有 $X(f \circ \phi) = Yf \circ \phi$.

证明 ϕ 为群同态说明 $L_{\phi(a)} \circ \phi = \phi \circ L_a$, 因此

$$Y_{\phi(a)} = (dL_{\phi(a)})_e \circ d\phi_e(X_e) = d\phi_a \circ (dL_a)_e(X_e) = d\phi_a(X_a),$$

这说明 X, Y 是 ϕ -相关的, 进一步对任意 $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$, 记 $Y_i = d\phi(X_i)$, 易得 $[Y_1, Y_2]$ 与 $d\phi([X_1, X_2])$ 是 ϕ -相关的, 进而 $d\phi([X_1, X_2]) = [Y_1, Y_2]$, 因此 $d\phi$ 为李代数同态.

4.4 指数映射

单参数子群

由于李群上的左不变向量场仅由一点的取值决定, 因此可以通过左乘映射来“一致控制”出积分曲线的存在区间, 由此可得

引理 4.1 (左不变向量场的完备性)

设 G 为李群, 则任意 $X \in \mathfrak{g}$ 完备.



注 证明与紧支向量场的完备性类似.

命题 4.8 (李群上的流 = 右乘法)

设 G 为李群, 则对任意 $g \in G, X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$ 有 $\phi_t^X(g) = g\phi_t^X(e)$.



证明 根据积分曲线的唯一性可得 $\phi_t^X(g) = \gamma_g(t) = L_g \circ \gamma_e(t) = g\phi_t^X(e)$.

上述命题说明 $\phi_t^X = R_{\phi_t^X(e)}$, 即李群上左不变向量场 X 生成的流在 G 上的作用就是右乘 (换句话说, X 生成流的作用仅由它在 e 处的作用决定), 进一步根据流的性质有

$$g\phi_{s+t}^X(e) = \phi_{t+s}^X(g) = \phi_t^X \phi_s^X(g) = \phi_t^X(g\phi_s^X(e)) = g\phi_s^X(e)\phi_t^X(e).$$

推论 4.1 (单参数子群)

设 G 是李群, 则对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 映射 $\rho^X: \mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto \phi_t^X(e)$ 为一个李群同态.



注 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 称 ρ^X 为 G 的单参数子群.

证明 已证它是群同态, 考虑 $G \times \mathfrak{g}$ 上的 (光滑) 完备向量场 $\tilde{X}(g, X) = (X_g, 0)$, 它生成的流恰好为

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g}, \quad (t, g, X) \mapsto (\phi_t^X(g), X),$$

而 ρ^X 可以复合得到:

$$\rho^X : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad t \mapsto (t, e, X) \mapsto (\phi_t^X(e), X) \mapsto \phi_t^X(e),$$

故 ρ^X 光滑.

注 事实上由相同过程可得, $\rho : \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \rightarrow G, (t, X) \mapsto \phi_t^X(e)$ 也是光滑的

另一方面, 若 ρ 为 G 的单参数子群, 令

$$X_g := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{\rho(t)} g,$$

容易验证 X 为 G 上的左不变向量场, 由此可得一一对应

命题 4.9 (单参数子群 $\leftrightarrow \mathfrak{g}$)

设 G 为李群, 则有一一对应:

$$\{G \text{ 的单参数子群} \} \leftrightarrow \mathfrak{g} \leftrightarrow T_e G$$

注 X 称为 ρ^X 的一个无穷小生成元, 由此可得看待 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的另一视角: G 中所有单参数子群的无穷小生成元.

指数映射

定义 4.9 (指数映射)

设 G 为李群, 定义其上的指数映射

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \phi_1^X(e).$$

注 存在性与唯一性由前面的结论保证; 注意到 $t \mapsto \exp_X(t)$ 为 G 的唯一单参数子群使得 0 处的切向量为 X_e . 根据定义, 可以立即得到一些指数映射的性质:

命题 4.10 (指数映射的性质)

- $\exp(tX) = \phi_t^X(e) = \rho^X(t)$.
- $\exp(tX) \exp(sX) = \exp((t+s)X)$.
- $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$.

注 一般 $\exp(X) \exp(Y) \neq \exp(X+Y)$.

例 4.6 指数映射的例子

- 对于 $G = \mathbb{R}^*$, $T_1 G$ 可等同于 $\mathbb{R}$, 对任意 $x \partial_t \in T_1 G$, 对应的左不变向量场为 $X_a = ax \partial_t$, 进而可得 $\gamma_e^X(t) = e^{tx}$, 因此 $\exp(x) = e^x$.
- 对于 $G = (S^1, \cdot)$ 有 $\exp : i\mathbb{R} = T_1 S^1 \rightarrow S^1, ix \mapsto e^{ix}$.
- 对于 $G = (\mathbb{R}^n, +)$ 有 $\exp : \mathbb{R}^n = T_0 \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \exp(x) = x$.
- 对于 $G = GL(n, \mathbb{R})$ 有 $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$.

下面证明指数映射的一个重要性质.

命题 4.11

指数映射 $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ 光滑, 并且 $(d\exp)_0 = \text{Id}_{\mathfrak{g}} : T_0 \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \cong T_e G$.

注 这里的 $\text{Id}_{\mathfrak{g}}$ 需要在同构意义下考虑.

证明 考虑 $G \times \mathfrak{g}$ 上的 (光滑) 完备向量场 $\tilde{X}(g, X) = (X_g, 0)$, 它生成的流恰好为

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g}, \quad (t, g, X) \mapsto (\phi_t^X(g), X),$$

可以复合得到 $\exp$:

$$\exp : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto (1, e, X) \mapsto (\phi_1^X(e), X) \mapsto \phi_1^X(e),$$

故 $\exp$ 光滑 (同样可得)。

进一步, 对任意 $X \in T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$, 由于 $\exp(tX) = \phi_t^X(e) = \gamma_e^X(t)$, 因此

$$(d\exp)_0 X = (d\exp)_0 \frac{d(tX)}{dt} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX) = X_e.$$

推论 4.2

指数映射 $\exp$ 是 0 处的局部微分同胚。

下述定理说明, 指数映射确实是连接李群与李代数的桥梁。

定理 4.4 (exp is nature)

设 $\phi : G \rightarrow H$ 为李群同态, 则有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\phi} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

证明 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, $\gamma(t) = \phi(\exp(tX))$ 为 H 的单参数子群, 它在 e 处的切向量为

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi \circ \exp(tX) = d\phi_e \circ (d\exp)_0 \circ (tX)(\partial_t|_{t=0}) = d\phi_e(X),$$

根据单参数子群与 $\mathfrak{g}$ 的对应可得 $\phi(\exp(tX)) = \exp(td\phi(X))$ 。

¶ Baker-Campbell-Hausdorff 公式

虽然一般 $\exp(tX)\exp(tY) \neq \exp(t(X+Y))$, 但我们还是想知道它们之间相差多少, 借助简单的求导可以得到一个初步的结果:

命题 4.12

设 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 则存在光滑映射 $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{g}$ 使得对任意 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 有

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + t^2 Z(t)).$$

证明 由于 $\exp$ 为 0 处的局部微分同胚, 因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\phi(t) = \exp^{-1}(\exp(tX)\exp(tY))$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上良定且光滑, 首先 $\phi(0) = 0$, 进一步求导可得

$$\phi'(0) = (d\exp_0)^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tY) \right) = X + Y,$$

因此 $\phi(t) = \phi(0) + t \int_0^1 \phi'(ts) ds = t(X+Y) + t^2 Z(t)$ 。

其中 $Z(t)$ 的具体表达式被称为 Baker-Campbell-Hausdorff 公式:

$$Z(t) = \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{t}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) + \frac{t^2}{24}[X, [Y, [X, Y]]] + \cdots,$$

其存在性可如下表达:

定理 4.5 (Baker-Campbell-Hausdorff)

当 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 充分小时, 有

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \sum_{m \geq 2} P_m(X, Y)\right),$$

其中 P_m 为 m 次李多项式, 即关于 X, Y 的交换子复合 $m-1$ 次的表达式.



注 关于其具体形式在此不做讨论, 特别当 G 为交换群时有 $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y) = \exp(Y)\exp(X)$. 最后我们借助指数映射的 Taylor 展开, 将一开始的结果多算一阶.

对任意 $X \in \mathfrak{g}, f \in C^\infty(G)$ 有

$$(Xf)(a) = X_a f = (dL_a)_e(X_e)(f) = X_e(f \circ L_a) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a \exp(tX)),$$

进而对任意 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$(Xf)(a \exp(tX)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} f(a \exp(tX) \exp(sX)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} f(a \exp((t+s)X)) = \frac{d}{dt} f(a \exp(tX)),$$

由此可得

$$(X^k f)(a \exp(tX)) = \frac{d^k}{dt^k} f(a \exp(tX)) \Rightarrow (X^k f)(a) = \frac{d^k}{dt^k}\bigg|_{t=0} f(a \exp(tX)).$$

这一结论可以推广到多元: 对 $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ 有

$$(X_1 \cdots X_k f)(a) = \frac{\partial^k}{\partial t_1 \cdots \partial t_k}\bigg|_{t_1=\dots=t_k=0} f(a \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_k X_k)).$$

命题 4.13

设 $f \in C^\infty(G)$, 则对 $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ 以及充分小的 $|t|$ 有

$$f(\exp(tX_1) \cdots \exp(tX_n)) = f(e) + t \sum_i (X_i f)(e) + \frac{t^2}{2} \left(\sum_i (X_i^2 f)(e) + 2 \sum_{i < j} (X_i X_j f)(e) \right) + O(t^3)$$



注 考虑 $f(\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n))$ 以及多元展开也有类似结果.

证明 记 $\phi(t) = f(\exp(tX_1) \cdots \exp(tX_n))$, 则 $\phi(0) = f(e)$, 根据上面的结果可得

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\exp(tX_1) \cdots \exp(tX_n)) = \sum_{i=1}^n (X_i f)(e), \\ \phi''(0) &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} f(\exp(tX_1) \cdots \exp(tX_n)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} f(\exp(tX_1) \exp(sX_1) \cdots \exp(tX_n) \exp(sX_n)) \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (X_1 f + \cdots + X_n f) \exp(sX_1) \cdots \exp(sX_n) \\ &= (X_1 + \cdots + X_n)^2 f(e) \\ &= \sum_i (X_i^2 f)(e) + 2 \sum_{i < j} (X_i X_j f)(e), \end{aligned}$$

根据 Taylor 展开的定义即得.

特别地, 取 $f = \exp^{-1}$ 可得

推论 4.3

设 $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$, 对充分小的 $|t|$ 有

$$\exp(tX_1) \cdots \exp(tX_n) = \exp \left(t \sum_{i=1}^n X_i + \frac{t^2}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [X_i, X_j] + O(t^3) \right).$$



注 特别地

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp \left(tX + tY + \frac{t^2}{2} [X, Y] + O(|t|^3) \right).$$

证明 考虑 $\exp$ 在 $0 \in \mathfrak{g}$ 附近的逆 f 使得 $f(\exp(tX)) = tX$ (t 充分小), 则根据前面的讨论可得

$$\begin{aligned} (Xf)(e) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\exp(tX)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} tX = X, \\ (X^n f)(e) &= \frac{d^n}{dt^n} \Big|_{t=0} f(\exp(tX)) = \frac{d^n}{dt^n} \Big|_{t=0} tX = 0, \end{aligned}$$

注意到 $f(e) = 0$ 以及

$$\sum_i X_i^2 + 2 \sum_{i < j} X_i X_j = (X_1 + \cdots + X_n)^2 + \sum_{i < j} [X_i, X_j],$$

借助前述命题, 对两边取逆可得

$$\exp(tX_1) \cdots \exp(tX_n) = \exp \left(t \sum_i X_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i < j} [X_i, X_j] + O(t^3) \right).$$

李群的伴随表示

定义 4.10 (李群表示)

设 G 为李群, 称李群同态 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 为一个李群表示, 其中 V 为线性空间.



注 当 $\dim V < \infty$ 时称之为有限表示; 若 ρ 为单同态, 则称之为忠实表示.

对于李群 G , 考虑共轭映射

$$c(g): G \rightarrow G, \quad x \mapsto gxg^{-1},$$

显然 $c(g) = L_g \circ R_{g^{-1}}$ 光滑, 因此对任意 $g \in G$, 它诱导李代数同态 ($c(g)$ 可逆说明它实际上是同构)

$$\text{Ad}(g) = \text{Ad}_g := dc(g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

由此得到一个映射

$$\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g}),$$

根据链式法则可得 $dc(g_1 g_2)_e = dc(g_1)_e \circ dc(g_2)_e$, 故 Ad 也是一个群同态, 事实上可以证明 Ad 为李群同态.

命题 4.14 (李群伴随表示的光滑性)

伴随表示 $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ 为一个李群同态.



证明 只需证明它是光滑的, 通过取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $E_1, \dots, E_n$ 将 $GL(\mathfrak{g})$ 等同于 $GL(n, \mathbb{R})$, 只需证明对任意 i, j , 矩阵分量 $(\text{Ad}(g))_{ij} = E^j(\text{Ad}(g)(E_i))$ 光滑即可 (其中 E^j 为 E_j 的对偶基).

考虑光滑映射 $C: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto ghg^{-1}$, 则对任意 $g \in G, X \in \mathfrak{g}$ 有

$$\text{Ad}(g)(X) = dc(g)(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c(g)(\exp(tX)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} C(g, \exp(tX)) = dC_{(g,e)}(0, X_e),$$

注意到 $dC : TG \times TG \rightarrow TG$ 光滑, 因此当 X 固定时 $\text{Ad}(g)(X)$ (关于 g) 可表达为光滑映射的复合:

$$G \rightarrow TG \rightarrow TG \times TG \rightarrow TG, \quad g \mapsto 0_g \mapsto (0_g, X_e) \mapsto dC_{(g,e)}(0_g, X_e),$$

得证.

进一步可以计算伴随表示的诱导映射, 事实上它恰好是李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示.

命题 4.15 (李群伴随表示 $\rightsquigarrow$ 李代数伴随表示)

设 G 为李群, 则 $d(\text{Ad}) = \text{ad}$, 其中

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto \text{ad}_X = \{Y \mapsto [X, Y]\}$$

为对应李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示.

证明 对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 有

$$d(\text{Ad})(X)(Y) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX)) \right) Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Ad}(\exp(tX))Y),$$

根据定义有 $\text{Ad}(g) = dC(g) = dR_{g^{-1}} \circ dL_g$, 只考虑单位元处的取值可得

$$(\text{Ad}(\exp(tX))(Y))_e = dR_{\exp(-tX)} \circ dL_{\exp(tX)}(Y_e) = dR_{\exp(-tX)}(Y_{\exp(tX)}),$$

注意到 $\gamma_e^X(t) = \phi_t^X(e) = \exp(tX)$, $R_{\exp(-tX)} = \phi_{-t}^X(e)$, 根据李导数的定义可得

$$(d(\text{Ad})(X)(Y))_e = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\phi_{-t}^X|_{\phi_t^X(e)}(Y_{\phi_t^X(e)})) = [X, Y]_e,$$

故 $d(\text{Ad})(X)(Y) = \text{ad}_X(Y)$.

李群中的连续同态

一开始证明过, 李群中乘法的光滑性蕴含取逆的光滑性 (因此定义中只需要前者), 事实上李群间的连续同态总是光滑的.

引理 4.2

设 G 为李群, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ 为连续同态, 则 ϕ 是光滑的.

证明 只需证明 ϕ 在 0 附近的光滑性, 思路是说明它与一个光滑函数在稠密子集上相同.

设 U, V 分别为 $0 \in \mathfrak{g}, e \in G$ 的邻域, 使得 $\exp|_U : U \rightarrow V$ 为微分同胚 (不妨设 U 为星形域, 即 $tU \subset U, \forall t \in (0, 1)$), 记 $U' = U/2$, 不妨设 $[-1, 1] \subset \phi^{-1}(\exp(U'))$, 记 $\phi(1) = \exp(X)$, 下证: $\phi(t) = \exp(tX), \forall t \in [-1, 1]$, 根据连续性, 只需证明对任意 $r = m/n \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ 有 $\phi(r) = \exp(rX)$, 而这可以归结到两点:

- $\phi(m) = \exp(mX)$: 这是显然的.
- $\phi(1/n) = \exp(X/n)$: 设 $\phi(1/n) = \exp(Y)$, 则 $\exp(nY) = (\phi(1/n))^n = \phi(1) = \exp(X)$, 只需证明每个 $nY \in U$, 根据双射即得 $Y = X/n$.
首先 $Y \in U'$, 因此 $2Y = Y + Y \in U$, 根据 $\exp(2Y) = \phi(2/n) \in \exp(U')$ 以及单性可知 $2Y \in U'$, 以此类推可知 $nY \in U'$, 即 $X = nY$.
- $\phi(-m/n) = \exp(-mX/n)$: 这也是显然的.

定理 4.6 (连续 $\Rightarrow$ 光滑)

设 $\phi : G \rightarrow H$ 为李群间的连续同态, 则它是光滑的.

证明 只需证明单位元附近光滑, 设 $X_1, \dots, X_n$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 考虑光滑映射

$$\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow G, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto (\exp t_1 X_1) \cdots (\exp t_n X_n),$$

由于 $\phi(\exp(tX_i))$ 为 $\mathbb{R}$ 到 G 的连续同态, 因此它光滑, 进而 $\phi \circ \alpha$ 光滑. 注意到 0 是 α 的正则值, 设 $\alpha|_U : U \rightarrow V$ 为微分同胚, 则 $\phi \circ \alpha \circ \alpha|_U^{-1} : V \subset G \rightarrow H$ 光滑, 得证.

推论 4.4 (拓扑群上李群结构的唯一性)

设拓扑群 G 满足 C^2 局部欧, 则其上至多存在一个光滑结构使之成为李群.



证明 考虑恒同映射.

4.5 子群与子代数的关系

李群

定义 4.11 (李子群)

设 H 为李群 G 的子群, 若 H 同时为 G 的浸入子流形, 且群乘法 $\mu_H: H \times H \rightarrow H$ 光滑, 则称 H 为 G 的李子群.



注

- 若 H 为 G 的李子群, 则 $\iota_H: H \hookrightarrow G$ 为李群单同态.
- 根据定义, H 未必为 G 的嵌入子流形.
- 对于李群 G 的子群 H , 若它是 G 中的闭集则称之为 G 的**闭子群**; 若它还是 G 的李子群则称之为**闭李子群**.

借助陪集分解可得, 拓扑群的开子群是闭的.

引理 4.3 (开子群 $\Rightarrow$ 闭子群)

设 G 为拓扑群, 则其开子群同时为闭子群.



证明 设 H 为 G 的开子群, 做陪集分解 $G = \bigsqcup_{g \in G} gH$, 而每个 gH 依然是开集, 因此 $H = G \setminus \bigsqcup_{g \neq e} gH$ 为闭集.

李子群的流形结构

这一小节中“正则嵌入”指前面的“嵌入”, “嵌入”指“单浸入”, “拟正则嵌入”指带有某种泛性质的“单浸入”.

定理 4.7 (嵌入子流形与李子群)

设 G 为李群, H 为其子群, 则

- 若 H 为拟正则嵌入子流形, 则 H 是 G 的李子群.
- 若 H 为正则嵌入子流形, 则 H 是 G 的闭李子群.



注 正则嵌入的像是局部闭的 (见 GTM102 P17).

证明 (1) 设 H 为拟正则嵌入子流形, 则只需证明群乘法 $\nu: H \times H \rightarrow H$ 光滑, 注意到 $\mu|_{H \times H} = \iota \circ \nu$, 根据拟正则嵌入的定义即得.

(2) 进一步若 H 为正则嵌入子流形, 首先它是李子群, 并且是 G 的局部闭集, 因此为 $\overline{H}$ 的相对开子集, 而 $\overline{H}$ 为 G 的拓扑子群, 因此 $H \subset \overline{H}$ 开说明它闭, 即 $H = \overline{H}$, 说明 $H \subset G$ 闭.

定理 4.8

设 A 为李群 G 的子群, 若 A 上有光滑流形结构使得 (A, ι) 为 G 的正则嵌入子流形, 则这样的结构是唯一的, 并且在该结构下 A 为李群 (因此为 G 的李子群).



证明 通过将 $T_e A$ 左平移, 可以给出 G 上的光滑分布 $\mathcal{V}$, 只需证明 A 是 $\mathcal{V}$ 的过 e 的积分子流形, 进而 A 是拟正则嵌入子流形说明它是李子群, 唯一性可通过拟正则嵌入的泛性质得到.

上述定理说明, 李群的子集 (如果可以) 成为一个李子群, 那么它的结构 (拓扑结构、光滑结构、群结构) 是唯一的. 进一步, 在李群中, 何时拟正则子流形是正则的? 下面的定理给出了一些刻画.

引理 4.4 (连续同态 $\Rightarrow$ 开)

设 A, B 为 C^2 -LCH 群, $\phi: A \rightarrow B$ 为连续满同态, 则 ϕ 为开映射, 进一步若 ϕ 单, 则它是一个同胚.

注 LCH 空间是第二纲集.

证明 只需证明: 对任意开集 $U \ni e_A$, e_B 为 $\phi(U)$ 的内点. 首先取 e_A 的紧邻域 V 使得 $VV^{-1} \subset U$, 根据 A2 可知存在 $a_1, a_2, \dots \in A$ 使得 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n V$, 进而 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi(a_n)\phi(V)$ (并且每个 $\phi(a_n)\phi(V)$ 都是紧集). 由于 B 为第二纲集, 因此必然存在某个 $\phi(a_n)\phi(V)$ 有内点 (即不全是疏集), 即 $\phi(V)$ 有内点 $\phi(b)$, 因此 $e_B = \phi(b)\phi(b)^{-1}$ 为 $\phi(V)\phi(V)^{-1}$ 的内点, 进而为 $\phi(U)$ 的内点, 得证.

定理 4.9 (拟正则 $\Leftrightarrow$ 正则)

设 G 为李群, H 为其李子群, 则 H 为 G 的拟正则嵌入子流形, 并且下述等价:

1. H 为 G 的拓扑子群.
2. H 为 G 的正则嵌入子流形.
3. H 为 G 的闭子集.

注 这一结论说明, 只需要验证李子群的闭性, 就能得到它是一个正则嵌入子流形. 事实上, 有更强的 **Gartan 闭子群定理**: 李群 G 的任意闭子群 H 都是其 (正则嵌入) 子流形.

证明 首先由于 H 为 $\mathcal{V}^H$ 的 (对合) 积分流形, 因此它是拟正则嵌入的. 注意到 $1 \Rightarrow 2$ 是定义, $2 \Rightarrow 3$ 是显然的 (根据前几节的结论), 下证 $3 \Rightarrow 1$.

设 H 为 G 的闭子集, 则 H 在子空间拓扑下是 C^2 -LCH 的, 这时 $\text{Id}: (H, \mathcal{T}) \rightarrow (H, \mathcal{T}_G)$ 为连续群同构 (连续性由子空间拓扑的泛性质可得), 故为同胚, 即 H 为 G 的拓扑子群.

例 4.7

- 非闭李子群 (不是正则嵌入子流形): 考虑李群 $\mathbb{T}^2$ 以及其李子群 $H = \{(e^{it}, e^{i\alpha t}) : t \in \mathbb{R}\}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\iota: \mathbb{R} \hookrightarrow H$), 它不是闭的 (因为 H 在 G 中稠密).
- $O_n(\mathbb{R})$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的闭李子群, 它们的李代数分别为 $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

¶ 李子群的李代数

设 H 为 G 的李子群, $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ 分别为二者的李代数, 则 $d\iota(\mathfrak{h})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (注意到 $d\iota$ 单, 因此 $\mathfrak{h}$ 也可视为 $\mathfrak{g}$ 的子代数).

另一方面, 任意 $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ 都可以给出 G 上的一个光滑分布 $\mathcal{V}^{\mathfrak{h}}$, 它由 $\mathfrak{h}$ 的一组基生成, 并且 $\mathfrak{h}$ 为李代数说明它是对合的, 根据 Frobenius 定理可知它可积, 进而可以给出该分布在 G 单位元处的极大积分子流形, 并且证明它是一个李子群.

借助如上观察, 我们给出了李群的李子群与其李代数的李子代数间的对应, 后面会证明李群的基本定理之一: **连通李子群与李子代数一一对应**. 为了讨论这一点, 我们约定李子群之间的等价关系: 称 $(H_1, \phi_1), (H_2, \phi_2)$ 等价, 若存在李群同构 α 使得 $\phi_1 \circ \alpha = \phi_2$.

引理 4.5 (李群由单位元邻域生成)

设 G 为连通李群, U 为单位元 e 的一个邻域, 则 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

证明 取 e 的开邻域 $V \subset U$ 使得 $V = V^{-1}$ (不妨直接考虑 $U \cap U^{-1}$, 更容易取这样的 V), 考虑 $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$, 它是 G 的开子群, 因此也为闭子群, 根据 G 的连通性可知 $G = H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, 得证.

定理 4.10 (李子代数 $\sim$ (连通) 李子群)

设 G 为李群, $\mathfrak{g}$ 为其李代数, $\tilde{\mathfrak{h}} \leq \mathfrak{g}$, 则存在 G 的唯一连通李子群 H 使得 $d\iota(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.



证明 根据 Frobenius 定理, 记 $\mathcal{V}^{\tilde{\mathfrak{h}}}$ 在 e 处的极大积分子流形为 H , 对任意 $g \in H$, 根据极大性可知 $L_g(H) = L_{g^{-1}}(H) = H$, 因此 $\iota: H \rightarrow G$ 为群同态, 进一步设 $\mu_H: H \times H \rightarrow H$ 为群乘法, 由于积分子流形是拟正则嵌入子流形, 而 $\mu|_{H \times H}$ 光滑, 因此 μ_H 光滑, 因此 (H, ι) 为 G 的李子群, 并且易得 $d\iota(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

$$\begin{array}{ccccc} H \times H & \xrightarrow{\mu|_{H \times H}} & G & & K & \xrightarrow{\iota'} & G \\ & \searrow \mu_H & \uparrow \iota & & \searrow \exists! \eta & \uparrow \iota & \\ & & H & & & H & \end{array}$$

此外假设还有其它李子群 (K, ι') 满足条件, 则 K 也是相同分布的过单位元的积分子流形, 根据 H 的极大性可得 $\iota'(K) \subset \iota(H)$, 并且存在光滑映射 $\eta: K \rightarrow H$ 满足 $\iota' = \iota \circ \eta$ (它是一个李群单同态), 特别的, η 为单位元附近的局部微分同胚 (K, H 维数相等), 因此根据引理可知 $K = H$.

推论 4.5

设 G 为李群, $\mathfrak{g}$ 为其李代数.

- $\mathfrak{g}$ 的李子代数与 G 的连通李子群一一对应.
- 对 G 的任意李子群 (H, ι) , 其任意连通分支都是 $\mathcal{V}^{d\iota(\mathfrak{h})}$ 的极大积分子流形.

**Cartan 闭子群定理**

接下来证明李群中的一个重要结论:

定理 4.11 (Cartan)

设 G 为李群, H 为其闭子群, 则 H 是 G 的闭李子群.



注 根据前面的结论, G 的李子群 H 是闭的等价于它是正则嵌入子流形或拓扑子群, 因此闭子群上的拓扑是确定的 (子空间拓扑), 并且根据前面的结论, 其上的李群结构也是唯一的.

借助该定理, 可以得到李群同态的核依然是李群.

推论 4.6 (李群同态的核)

设 $\phi: G \rightarrow H$ 为李群同态, 则 $H = \text{Ker } \phi$ 为 G 的闭李子群, 并且其李代数恰好为 $\mathfrak{h} = \text{Ker } d\phi$.



证明 易得 H 为 G 的闭李子群, 进一步 $X \in \mathfrak{h}$ 当且仅当 $\exp(tX) \in H, \forall t \in \mathbb{R}$, 即

$$\phi(\exp(tX)) = \exp(td\phi(X)) = e \Leftrightarrow d\phi(X) = 0.$$

为了证明闭子群定理, 首先给出如下引理:

引理 4.6

设 A 为 G 的子群, $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子空间, $U \subset \mathfrak{g}$ 为 0 的邻域, 使得 $\exp|_U: U \rightarrow V$ 为微分同胚, 假设 $\exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A$, 则 A 为 G 的 (正则嵌入) 李子群, $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的李子代数.



证明 设 $\phi: \exp|_{U \cap \mathfrak{a}}: U \cap \mathfrak{a} \rightarrow V \cap A$, 则在子空间拓扑下 $(\phi^{-1}, A \cap V, \mathfrak{a} \cap U)$ 为 $e \in A$ 处的一个坐标卡, 进而通过左平移可以得到 A 中任意处的坐标卡. 类似地, 其上的光滑结构可由 $\{(\phi^{-1} \circ L_{a^{-1}}, A \cap aV): a \in A\}$ 确定, 此时 A 为 G 的正则嵌入子流形, 故为 G 的 (闭) 李子群, 根据上一命题易得 $\mathfrak{a}$ 为 A 的李代数.

根据上述引理, 主要定理的证明分为如下步骤:

1. 定义 $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}: \exp(tX) \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}$, 证明它是 $\mathfrak{g}$ 的子空间.

2. 证明存在 U, V 满足上述引理, 进而完成证明 (这里借助反证, 通过闭性导出矛盾).

引理 4.7

设 G 为李群, 则对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 有

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + O(t^2)), \quad t \rightarrow 0.$$



证明 当 t 充分小时, 存在 $\mathfrak{g}$ 中的光滑曲线 $Z(t)$ 满足 $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$, 两边在 0 处求导可得

$$\dot{Z}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX)\exp(tY) = X + Y,$$

因此作 Taylor 展开可得 $Z(t) = t(X+Y) + O(t^2)$.

命题 4.16 (Step 1)

$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间.



证明 只需证明加法封闭性, 设 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 则对任意 t 都有 $\exp(tX)\exp(tY) \in H$, 根据引理可得

$$\exp t(X+Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp \frac{tX}{n} \exp \frac{tY}{n} \right)^n,$$

根据 H 中乘法、极限的封闭性可得 $X+Y \in \mathfrak{h}$.

引理 4.8

赋予 $\mathfrak{g}$ 一个内积, 假设 $\{X_i\} \subset \mathfrak{g}$ 满足

- $X_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$.
- $\exp(X_i) \in H, \forall i \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/|X_n| = X \in \mathfrak{g}$.

则 $X \in \mathfrak{h}$.



证明 固定 $t \neq 0$, 设 $n_i = [t/|X_i|]$ (整数部分), 则

$$|n_i X_i - tX| \leq \left| n_i - \frac{t}{|X_i|} \right| |X_i| + t \left| \frac{X_i}{|X_i|} - X \right| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

因此

$$\exp(tX) = \lim_{i \rightarrow \infty} \exp(n_i X_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\exp X_i)^{n_i} \in H,$$

进而 $X \in \mathfrak{h}$.

命题 4.17 (Step 2)

存在邻域 U, V 满足前述引理.



证明 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$, 考虑光滑映射

$$\Phi: \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}' \rightarrow G, \quad X+Y \mapsto \exp X \exp Y,$$

则 $d\Phi_0 = \text{Id}$ 说明 Φ 在 0 附近为微分同胚, 注意到 $\Phi|_{\mathfrak{h}} = \exp|_{\mathfrak{h}}$, 因此只需证明 Φ 将 $0 \in \mathfrak{h}$ 的邻域映到 $e \in H$ 的邻域.

假设结论不成立, 则存在 $\{X_i + Y_i\} \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$ 使得 $X_i + Y_i \rightarrow 0$. 由于 $\Phi(X_i + Y_i), \exp X_i \in H$, 因此 $\exp Y_i \in H$, 不妨设 $Y_i \neq 0, Y \in \mathfrak{h}'$ 为 $\{Y_i/|Y_i|\}$ 的一个极限点, 则根据引理可得 $Y \in \mathfrak{h}$, 因此 $Y = 0$, 与 $|Y| = 1$ 矛盾.

¶ 线性李群及其李代数

最大的线性李群为一般线性群 $GL(n, \mathbb{R})$, 其李代数为 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (包含所有 n 阶方阵, 李括号为矩阵的交换子), 它有两个连通分支 $GL_+(n, \mathbb{R}), GL_-(n, \mathbb{R})$, 分别包括行列式为正/负的矩阵, 对于 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, 考虑映射

$e^{\cdot A} : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ 定义为

$$e^{tA} := I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots,$$

注意到该映射可以由一系列映射内闭一致逼近, 因此它是连续的, 注意到当 $AB = BA$ 时有 $e^{A+B} = e^A e^B$, 因此上述映射是一个群同态, 因此为李群同态, 此外 $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e^{tA} = A$, 故而得到一般线性群上的指数映射为

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto e^A.$$

例 4.8 特殊线性群 $GL(n, \mathbb{R})$ 有子群 $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$, 由于 1 是 $\det$ 的正则值, 因此它是 $n^2 - 1$ 维李子群, 借助指数映射可得其李代数为 (注意 $\det e^A = e^{\text{tr} A}$)

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \det e^A = 1\} = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr} A = 0\}.$$

例 4.9 正交群 $GL(n, \mathbb{R})$ 有子群 $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$, 考虑映射

$$f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto A^T A,$$

容易验证 $df_A(B) = A^T B + B^T A$, 当 A 可逆时 df_A 为满射, 因此 I 是 $f|_{GL(n, \mathbb{R})}$ 的正则值, 故 $O(n)$ 为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维李子群, 同样借助指数映射可得其李代数为

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : e^{A^T} e^A = e^{A^T + A} = I\} = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : A^T + A = 0\}.$$

例 4.10 辛群 考虑 $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : A^T J A = J\}$, 其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, 它是 $n(2n+1)$ 维李子群, 其李代数为

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : J A + A^T J = 0\}.$$

上面通过 $A^T B A = B$ 的条件给出了许多李子群, 这可以进一步推广: 设 $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个双线性型 (记其在标准基下对应矩阵为 B), 考虑

$$GL_\beta(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) : \beta(Xu, Xv) = \beta(u, v), \forall u, v \in \mathbb{R}^n\} = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) : X^T B X = B\}.$$

命题 4.18 ($GL(n, \mathbb{R})$ 的一类李子群)

$GL_\beta(n, \mathbb{R})$ 为 $GL(n, \mathbb{R})$ 的李子群, 其李代数为

$$\mathfrak{gl}_\beta(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T B + B A = 0\}.$$

证明 根据后面的 Cartan 闭子群定理可知 $GL_\beta(n, \mathbb{R})$ 为李子群, 下面给出它的李代数, $A \in \mathfrak{gl}_\beta(n, \mathbb{R})$ 当且仅当对任意 $t \in \mathbb{R}$ 有 $e^{tA} \in GL_\beta(n, \mathbb{R})$, 即 $e^{tA^T} B e^{tA} = B$, 两边在 $t = 0$ 处求导可得 $A^T B + B A = 0$; 反之若 $A^T B = -B A \Leftrightarrow (tA)^T B = B(-tA)$, 则根据定义可得 $e^{tA^T} B = B e^{-tA}$, 即 $e^{tA^T} B e^{tA} = B$, 得证.

例 4.11 酉群 上面的例子可以对应到复数, 例如 $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* A = I\}$ 就是 $GL(n, \mathbb{C})$ 的李子群, 其李代数为

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A^* + A = 0\}.$$

4.6 李基本定理

4.7 李群上的覆叠

设 $\pi: M \rightarrow N$ 为覆叠映射 (其中 M 为拓扑空间, N 为光滑流形), 则 M 上的拓扑自然是 C^2+ 局部欧的, 并且可以将 N 上的基本开邻域拉回为 M 的光滑结构, 使得 M 成为一个光滑流形 (此时 π 也为光滑映射). 进一步, 李群 G 的泛覆叠空间上也可以赋予李群结构.

定理 4.12 (李群泛覆叠空间上的李群结构)

设 G 为李群, $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ 为泛覆叠映射, 则对任意 $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$, $\tilde{G}$ 上存在唯一以 $\tilde{e}$ 为单位元的李群结构, 同时 π 为李群同态.



注 这一结论似乎对 G 上的一般覆叠也成立.

证明 考虑光滑映射

$$\alpha: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \pi(\tilde{x})\pi(\tilde{y}),$$

则对于 $(\tilde{e}, \tilde{e}) \in \tilde{G} \times \tilde{G}, e = \pi(\tilde{e})$, 存在提升 $\tilde{\alpha}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ 满足 $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha, \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, 下证 $(\tilde{G}, \tilde{\alpha})$ 确实为群.

- 封闭性: 显然.
- 单位元: 对任意 $\tilde{x} \in \tilde{G}$ 有 $\pi \circ \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{x}) = \alpha(\tilde{e}, \tilde{x}) = \pi(\tilde{e}) = \pi(\text{Id}(\tilde{x}))$, 即 $R_{\tilde{e}}, \text{Id}$ 都是 π 的提升, 根据唯一性可知 $R_{\tilde{e}} = \text{Id}$, 即 $\tilde{e}$ 为单位元.
- 结合律: 类似地, 考虑 $\beta_1, \beta_2: \tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, 其中

$$\beta_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z}), \quad \beta_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{\alpha}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}(\tilde{y}, \tilde{z})),$$

它们都是 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto \pi(\tilde{x})\pi(\tilde{y})\pi(\tilde{z})$ 的提升, 同样根据唯一性可得.

- 逆元: 同样的思路, 将 $i \circ \pi: \tilde{G} \rightarrow G, \tilde{x} \mapsto \pi(\tilde{x})^{-1}$ 提升即可.

$$\begin{array}{ccc} & (\tilde{G}, \tilde{e}) & \\ \tilde{\alpha} \nearrow & \downarrow \pi & \text{Id} \nearrow \\ (\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e})) & \xrightarrow{\alpha} & (G, e) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & (\tilde{G}, \tilde{e}) & \\ R_{\tilde{e}} \nearrow & \downarrow \pi & \\ (\tilde{G}, \tilde{e}) & \xrightarrow{\pi} & (G, e) \end{array}$$

命题 4.19

设 G, H 为连通李群, $\phi: G \rightarrow H$ 为李群同态, 则 ϕ 为覆叠映射当且仅当 $d\phi_e: T_e G \rightarrow T_e H$ 为同构.



证明 一边显然 (光滑覆叠是局部微分同胚), 假设 $d\phi_e$ 为同构, 则 ϕ 是局部微分同胚, 根据齐性, 只需证明 e 附近存在基本开邻域.

首先 $\phi^{-1}(e)$ 是离散的 (零维流形), 因此可取 e 的开邻域 V 使得 $VV^{-1} \cap \phi^{-1}(e) = \{e\}$, 断言 $\phi|_V: V \rightarrow \phi(V)$ 为单射 (若 $\phi(x) = \phi(y)$ 则 $\phi(xy^{-1}) = e$, 即 $x = y$), 进一步容易验证 $\phi(V)$ 为基本开邻域 (包括 $\phi^{-1}(\phi(V)) = \bigcup_{g \in \phi^{-1}(e)} gU$ 等).

单连通李群

定理 4.13 (李代数同态 $\leadsto$ 李群同态)

设 G, H 为李群 (G 单连通), $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 为各自的李代数, $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 为李代数同态, 则存在唯一李群同态 $\phi: G \rightarrow H$ 使得 $\psi = d\phi$.



证明 考虑 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ (这是 $G \times H$ 的李代数) 的李子代数 $\mathfrak{k} = \text{graph}(\psi) = \{(x, y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} : y = \psi(x)\}$, 则存在 $G \times H$ 的李子群 K 使得 $\mathfrak{k}$ 为 K 的李代数, 考虑李群同构 $\varphi: K \hookrightarrow G \times H \rightarrow G$ (首先它是李群同态, 容易验证它是双

射且为局部微分同胚), 令 $\phi = \pi_2 \circ \varphi^{-1} : G \rightarrow K \rightarrow H$, 则它是李群同态并且 $d\phi = \psi$, 唯一性显然.

推论 4.7

若单连通李群 G, H 有同构的李代数, 则 $G \cong H$ (李群意义下).



Ado 给出过一个结论: 任一李代数都是某个 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 的李子代数, 由此可知若 $\mathfrak{g}$ 为李代数, 则存在单连通李群 G ,

定理 4.14

李代数的同构类与单连通李群一一对应.



局部同构群

前面提到过, 李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 对应了 G 单位元所在的连通分支 G^0 , 事实上后面会证明, $\mathfrak{g}$ 完全决定了 G 的局部性质.

4.8 李群上的微积分

左不变形式

仿照左不变向量场, 可以定义李群上的左不变形式

定义 4.12 (左不变形式)

设 G 为李群, 若 $\omega \in \Omega^k(G)$ 满足 $(L_g)^*\omega = \omega$, 则称它是 G 上的左不变 k -形式, 其全体记为 Ω_{inv}^k .



注

- 特别的, 左不变 0-形式恰好为 G 上的常函数全体.
- 根据拉回的形式可知对任意 $\alpha \in \Omega_{\text{inv}}^k(G), \beta \in \Omega_{\text{inv}}^l(G)$ 有

$$(L_g)^*(\alpha \wedge \beta) = (L_g)^*\alpha \wedge (L_g)^*\beta = \alpha \wedge \beta,$$

因此所有左不变形式也构成一个分次子环 $\Omega_{\text{inv}}^*(G) = \bigoplus_{k=0}^{\dim G} \Omega_{\text{inv}}^k(G)$.

- 与左不变向量场类似, 左不变 1-形式也可以通过一个 $\omega_e \in T_e^*G$ 生成.

设 $\alpha \in \Omega_{\text{inv}}^1(G), X \in \mathfrak{g}$, 则

$$(L_g)^*(\alpha(X)) = (L_g)^*(\iota_X \alpha) = (L_g)^*(\iota_{(dL_g)X} \alpha) = \iota_X (L_g)^* \alpha = \alpha(X),$$

即 $\alpha(X) \in \Omega_{\text{inv}}^0(G)$, 这说明每个左不变 1-形式可以视为左不变向量场空间 $\mathfrak{g}$ 上的线性泛函, 故 $\Omega_{\text{inv}}^1(G)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间, 记作 $\mathfrak{g}^*$. 进一步对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}, \alpha \in \mathfrak{g}^*$ 的微分满足

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = -\alpha([X, Y]),$$

即

$$d\alpha(X, Y) + \alpha([X, Y]) = 0.$$

上述方程称为 **Maurer-Cartan 方程** (此外左不变 1-形式也称为 **Maurer-Cartan 形式**).

若取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $(X_1, \dots, X_n)$ 以及 $\mathfrak{g}^*$ 中相应的对偶基 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 可设

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k,$$

其中 $\{C_{ij}^k\}$ 称为 G 在这一组基下的**结构常数**, 进一步若设

$$d\alpha_k = \sum_{i < j} a_k^{ij} \alpha_i \wedge \alpha_j,$$

则上述方程说明

$$a_k^{ij} = \sum_{i < j} a_k^{ij} (\alpha_i \wedge \alpha_j)(X_i, X_j) = d\alpha_k(X_i, X_j) = -\alpha_k([X_i, X_j]) = -C_{ij}^k,$$

因此

$$d\alpha_k = - \sum_{i < j} C_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j = -\frac{1}{2} \sum_{i, j} C_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j.$$



左不变度量

定义 4.13 (左不变度量)

设 G 为李群, 若其上的 Riemann 度量 $\langle -, - \rangle$ 满足

$$(L_g)^* \langle x, y \rangle_p = \langle (L_g)_*(x), (L_g)_*(y) \rangle_{gp}, \quad \forall x, y \in T_p G,$$

则称 $\langle -, - \rangle$ 为其上的一个左不变度量.



注 类似可定义右不变度量, 若一个 Riemann 度量同时是左、右不变的, 则称之为双不变度量 (bi-invariant).

命题 4.20 (紧李群上双不变度量的存在性)

紧李群上总存在双不变度量.



证明

事实上, 双不变度量的存在性可以如下刻画:

定理 4.15 (Milnor)

李群 G 存在双不变度量当且仅当 $G \cong N \times H$, 其中 N 为紧李群, H 为 Abel 李群.



引理 4.9

设 g 为 G 上的双不变度量, 则 $\text{ad}_X^* = -\text{ad}_X$.



证明 根据双不变性可得

$$\langle \text{Ad}_{\exp(tX)}(Y), \text{Ad}_{\exp(tX)}(Z) \rangle = \langle Y, Z \rangle,$$

而 $\text{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tX)}(Y)$, 因此上式在 $t=0$ 处求导可得

$$\langle \text{ad}_X(Y), Z \rangle = -\langle Y, \text{ad}_X(Z) \rangle = \langle Y, \text{ad}_X^*(Z) \rangle,$$

故 $\text{ad}_X = -(\text{ad}_X)^*$.

若李群 G 赋双不变度量, 则其上 Levi-Civita 联络可以比较简单的计算. 对于 (G, g) , 其上的 Koszul 公式为

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X),$$

而李代数的伴随表示满足 $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$, 因此

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(g([X, Y], Z) - g(\text{ad}_X(Z), Y) - g(\text{ad}_Y(Z), X)) \\ &= \frac{1}{2}(g([X, Y], Z) - g(Y, \text{ad}_X^*(Z)) - g(\text{ad}_Y^*(X), Z)) \\ &= \frac{1}{2}g([X, Y] - \text{ad}_X^*(Y) - \text{ad}_Y^*(X), Z), \end{aligned}$$

这说明

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X, Y] - \text{ad}_X^*(Y) - \text{ad}_Y^*(X)),$$

其中 ad_X^* 为 ad_X 的对偶, g 双不变说明 $(\text{ad}_X)^* = -\text{ad}_X$, 因此

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

推论 4.8

设 g 为 G 上的双不变度量, ∇ 为 Levi-Civita 联络, 则对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\nabla_X Y$ 也为左不变向量场.

引理 4.10

设 g 为 G 上的双不变度量, 则对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\langle X, Y \rangle$ 为常函数.

设 $X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$, 则

$$0 = Y(g(\nabla_X Z, W)) = g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W),$$

即 $g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) = -g(\nabla_X Z, \nabla_Y W)$, 计算 Riemann 曲率得到

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W) \\ &= -g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) - g(\nabla_{[X, Y]} Z, W) \\ &= -\frac{1}{4}g([Y, Z], [X, W]) + \frac{1}{4}g([X, Z], [Y, W]) + \frac{1}{2}g([Y, Z], [X], W) + \frac{1}{2}g([Z, X], [Y], W), \end{aligned}$$

其中

$$g([Y, Z], [X], W) = g(-[X, [Y, Z]], W) = g(-\text{ad}_X[Y, Z], W) = g([Y, Z], \text{ad}_X(W)) = g([Y, Z], [X, W]),$$

另一项同理, 因此

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= -\frac{1}{4}g([Y, Z], [X, W]) + \frac{1}{4}g([X, Z], [Y, W]) + \frac{1}{2}g([Y, Z], [X, W]) + \frac{1}{2}g([Z, X], [Y, W]) \\ &= \frac{1}{4}g([Y, Z], [X, W]) + \frac{1}{4}g([X, Z], [Y, W]), \end{aligned}$$

特别地

$$R(X, Y, Y, X) = \frac{1}{4}||[X, Y]||^2 \geq 0,$$

因此可得如下结论:

定理 4.16

若 g 为李群 G 上的双不变度量, 则在 Levi-Civita 联络下, 其截面曲率 $K(p)$ 非负.

第5章 流形上的微积分

5.1 余切空间与余切丛

定义 5.1 (余切空间)

设 M 为 n 维光滑流形, 称其在任意 $p \in M$ 处切空间的^{对偶空间}为 M 在该点的余切空间, 记为 $T_p^*M := (T_pM)^* = \mathcal{L}(T_pM, \mathbb{R})$, 其中元素称为该点的余切向量.



注 根据定义, 任意 $\omega_p \in T_p^*M$ 都是 T_pM 上的一个线性函数.

同样地, 将每一点的余切空间并置, 可以给出余切丛的定义.

定义 5.2 (余切丛)

设 M 为光滑流形, 称 $T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ 以及映射为 M 上的余切丛.



注 类似切丛, 余切丛上有自然的映射 $\pi: T^*M \rightarrow M, \omega_p \mapsto p$, 在稍晚一些我们会讨论其光滑流形结构 (其实与切丛很像).

正如向量场在每一点处指定了一个切向量 (也可以反过来, 视为每一点一个切向量的整合), 可以定义 **1-形式**, 它在每一点指定了一个线性泛函.

定义 5.3 (流形上的微分 1-形式)

设 M 为光滑流形, 映射 $\omega: M \rightarrow T^*M$, 若对任意 $p \in M$, $\omega(p) \in T_p^*(M)$, 则称 ω 为 M 上的微分 1-形式 (简称 1-形式), 若其光滑则称之为一个光滑 1-形式.



注 容易看出, 1-形式就是余切丛的截面.

例 5.1

- 对任意光滑函数 $f \in C^\infty(M)$, 可以将微分 df 视为一个 1-形式, 因为它在每一点 $p \in M$ 指定了一个线性映射 $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, 并且对任意 $X_p \in T_pM$ 有¹

$$df_p(X_p) = X_p(f),$$

- 对流形上的坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, 每个坐标映射分量的微分 $dx^1, \dots, dx^n$ 就是 U 上的一组光滑 1-形式, 并且对任意 $p \in U$, $dx_p^1, \dots, dx_p^n$ 构成 T_p^*M 的一组基, 这是因为

$$dx^i(\partial_1) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_{ij},$$

因此 $dx_p^1, \dots, dx_p^n$ 还是 $\partial_1, \dots, \partial_n$ 的对偶基!

- 设 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 为 M 的一个坐标卡, 则对任意 $p \in U, f \in C^\infty(M)$, 都有

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx_p^i,$$

或者说在 U 上有

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

结合后面的结论, 这种分解可以证明微分 df 是光滑 1-形式.

类比向量场截面的光滑性, 可以给出 1-形式光滑性的一些刻画, 证明是类似的.

¹Loring Tu 借助不同的记号区分向 $T_{f(p)}\mathbb{R}$ 的映射以及向 $\mathbb{R}$ 的映射, 虽然这样可能更清晰些, 但它们实际上就是一种当初讨论过的“等同”.

引理 5.1

设 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 是 M 的坐标卡, 则 1-形式 $\omega = \sum a_i dx^i$ 在 U 上光滑当且仅当每个系数 $a_i = c_i \circ \omega$ 光滑, 其中 c^i 是分解 $\omega = \sum c_i(\omega_p) dx_p^i$ 的系数.

**推论 5.1 (1-形式的光滑性: 系数刻画)**

设 ω 为 M 上的 1-形式, 则下述等价:

1. ω 光滑.
2. M 有一族 (光滑) 图册, 对其中任意坐标卡 (U, ϕ) , $\omega = \sum a_i dx^i$, 系数 $a_i = a_i(p)$ 均光滑.
3. 对任意坐标卡 (U, ϕ) , $\omega = \sum a_i dx^i$, 系数 $a_i = a_i(p)$ 均光滑.

**推论 5.2 (光滑函数的微分是光滑 1-形式)**

设 $f \in C^\infty(M)$, 则 df 为 M 上的光滑 1-形式.



除了系数刻画, 向量场还有一定的导子性, 借助它在光滑函数上的作用可以刻画光滑性; 同理对于 1-形式 ω , 它将向量场映为函数:

$$\omega(X)_p = \omega_p(X_p) \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in M,$$

首先证明

引理 5.2

设 ω 为 M 上的 1-形式, f 为 M 上的函数, X 为其上的向量场, 则 $\omega(fX) = f\omega(X)$.



证明 对任意 $p \in M$, 直接计算得到

$$\omega(fX)_p = \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_p) = (f\omega(X))_p.$$

命题 5.1 (1-形式的光滑性: 向量场刻画)

M 上的 1-形式 ω 光滑当且仅当对任意 $X \in \Gamma(TM)$, $\omega(X) \in C^\infty(M)$.



证明 $\Rightarrow$: 设 ω 为光滑 1-形式, X 为光滑向量场, 任取坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$, 设 $\omega = \sum a_i dx^i$, $X = \sum b^i \partial_j$, 则其光滑性保证了所有 a_i, b^j 光滑, 因此

$$\omega(X) = \sum a_i b^i \in C^\infty(M).$$

$\Leftarrow$: 任取任意 $p \in M$ 处的坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$, 则 $\omega = \sum a_i dx^i$ 的系数光滑, 考虑 $X = \partial_i$, 取 U 中一个鼓包函数 ρ 可将 X 延拓为 M 上的光滑向量场:

$$\bar{X}_p = \begin{cases} \rho(p)X_p, & p \in U, \\ 0, & p \notin U. \end{cases}$$

并且存在 p 的开邻域 $V_p^j \subset U$ 使得 $\bar{X}$ 与 X 在 V_p^j 上取值相同, 在其中有 $\omega(\bar{X}) = a_j$ 光滑, 若设 $V_p := \bigcap_{j=1}^n V_p^j$, 则 ω 在 V_p 中光滑 (因为系数光滑), 根据 p 的任意性得证.

注 上述命题表明, ω 可以视为 $C^\infty(M)$ 模- $\Gamma(TM)$ 与 $C^\infty(M)$ 之间的模同态.

¶ 余切丛的光滑流形结构

类似切丛, 对任意坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, 首先向 T^*U 上赋 $\tilde{\phi}$ 的诱导拓扑, 其中

$$\tilde{\phi}: T^*M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad (\omega_p) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), a_1(\omega_p), \dots, a_n(\omega_p)),$$

其中 $a_1, \dots, a_n$ 是 ω_p 作为 $dx_p^1, \dots, dx_p^n$ 线性表示的系数, 也可以直接记 $\tilde{\phi} = (\pi^*\phi, a_1, \dots, a_n)$. 将其整合起来给出

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha} \{A : A \text{ 在 } T^*U_{\alpha} \text{ 中为开集}\},$$

其中 U_{α} 为 M 的坐标开邻域, 借助相同的手法可以证明 $\mathcal{B}$ 为 T^*M 的拓扑基, 进而容易验证 T^*M 是拓扑流形, 其坐标卡为 $\{(T^*U_{\alpha}, \tilde{\phi}_{\alpha})\}$ (其中 $\{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$ 是 M 的坐标卡), 依然类似地, 可以证明转移映射 $\tilde{\phi}_{\alpha\beta} = \tilde{\phi}_{\beta} \circ \tilde{\phi}_{\alpha}^{-1}$ 光滑, 即 T^*M 是 $2n$ 维光滑流形.

5.1.1 对偶映射: 1-形式的拉回

首先回顾一个线性代数概念:

定义 5.4 (对偶映射)

设 $T: U \rightarrow V$ 为线性映射, 其对偶映射定义为

$$T^*: V^* \rightarrow U^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ T.$$



对于光滑映射 $F: M \rightarrow N$, 其有逐点线性映射 $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, 其对偶映射为

$$(dF_p)^*: T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M, \quad \omega_{F(p)} \mapsto \omega_{F(p)} \circ dF_p,$$

这些对偶映射可以同一记作 F^* , 也就是说对任意 $X_p \in T_p M$ 有

$$F^*(\omega_{F(p)})(X_p) = (dF_p)^*(\omega_{F(p)})(X_p) = \omega_{F(p)}(dF_p(X_p)).$$

这里的 F^* 也称为余切向量 $\omega_{F(p)}$ 关于 F 的拉回, 当然, 它也可以视为 1-形式之间的拉回

$$(F^*\omega)_p = F^*(\omega_{F(p)}), \quad \forall p \in M,$$

最后补充一点: 对于光滑映射 $F: M \rightarrow N$, 可以定义光滑函数 $g \in C^{\infty}(M)$ 的拉回² $F^*g = g \circ F \in C^{\infty}(N)$.

为了证明光滑 1-形式的拉回还是光滑 1-形式, 首先证明一些引理.

引理 5.3

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, 则

- 拉回与微分可交换: 对任意 $h \in C^{\infty}(M)$ 有 $F^*(dh) = d(F^*h)$.
- 拉回的加性与积性: 对任意光滑 1-形式 $\omega, \tau \in$ 以及 $g \in C^{\infty}(M)$ 有

$$F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau, \quad F^*(g\omega) = (F^*g)(F^*\omega).$$



证明

1. 只需验证对任意 $p \in M, X_p \in T_p M$ 有

$$F^*(dh)_p(X_p) = d(F^*h)_p(X_p),$$

而左式为.....

右式为.....

2. 加性是显然的, 只证明积性. 对任意 $p \in M$ 有

$$F^*(g\omega)_p = F^*(g(F(p))\omega_{F(p)}) = g(F(p))F^*(\omega_{F(p)}) = [(F^*g)(F^*\omega)]_p.$$

推论 5.3 (光滑 1-形式的拉回还是光滑 1-形式)

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, 则对 N 上任意光滑 1-形式 ω , 其拉回 $F^*\omega$ 是 M 上的光滑 1-形式.



证明 对任意 $p \in M$, 取 $p, F(p)$ 处的坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n), (V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ 使得 $F(U) \subset V$,

²未来将光滑函数视为 0-形式, 则它们都满足一般的 k -形式拉回的定义.

设在 V 上有 $\omega = \sum a_i dy^i$, 则在 U 上有

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_i)F^*(dy^i) = \sum (F^*a_i)d(F^*y^i) \\ &= \sum (a_i \circ F)d(y^i \circ F) \\ &= \sum_{i,j} (a_i \circ F) \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j, \end{aligned}$$

其系数光滑, 因此 $F^*\omega$ 光滑.

5.1.2 1-形式在浸入子流形上的限制

设 $S \subset M$ 为 $\iota: S \rightarrow M$ 的浸入子流形, 对任意 $p \in S$, $d\iota_p: T_p S \rightarrow T_p M$ 为单射, 因此 $T_p S$ 可以视为 $T_p M$ 的一个子空间 (此时 $d\iota_p$ 也是子空间的嵌入). 考虑 M 上的 1-形式 ω , 可以定义其在 S 上的限制为

$$(\omega|_S)_p(X_p) = \omega_p(X_p), \quad \forall p \in S, X_p \in T_p S.$$

事实上, 这种限制恰好是单浸入映射 ι 的拉回.

命题 5.2 (1-形式的限制 = 单浸入的拉回)

设 $\iota: S \hookrightarrow M$ 为单浸入, S 为浸入子流形, 则对 M 上的任意 1-形式 ω 有 $\iota^*\omega = \omega|_S$.

证明 对任意 $p \in S, X_p \in T_p S$ 有

$$(\iota^*\omega)_p(X_p) = \omega_{\iota(p)}(d\iota_p(X_p)) = (\omega|_S)_p(X_p).$$

注 未免赘余, 有时在上下文明确的情况下会直接记 $\omega|_S$ 为 ω .

例 5.2

- 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) := (x, y)$, 则 $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) = (-y, x)$, 它给出了 S^1 上的光滑向量场

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

根据前面的讨论, 对任意 $p = (x, y) \in S^1$, $d\iota_*(X_p) = -y\partial_x|_p + x\partial_y|_p$ 是 $p \in \mathbb{R}^2$ 处的切向量, 设 $\omega = adx + bdy$ 为 S^1 上的 1-形式, 将其视为 $\mathbb{R}^2$ 上的 1-形式, 计算可得

$$\omega(X) = -ay + bx,$$

特别取 $a = -y, b = x$ 则有 $\omega(X) \equiv 1$ (因为 S^1 上满足 $x^2 + y^2 = 1$).

- 考虑光滑映射 $h: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2, t \mapsto (x, y) = (\cos t, \sin t)$, 设 $\omega = -ydx + xdy$ 为 S^1 上的 1-形式, 则拉回为

$$\begin{aligned} h^*(-ydx + xdy) &= -(h^*y)d(h^*x) + (h^*x)d(h^*y) \\ &= -\sin t d(\cos t) + \cos t d(\sin t) \\ &= dt, \end{aligned}$$

并且 $dt(\partial_t) \equiv 1$.

5.2 流形上的微分形式

下面讨论一般的微分形式, 它实际上是借助张量积将前面的过程重走一遍.

5.2.1 微分 k -形式

讨论 1-形式的背景是余切丛 T^*M 及其截面 $\Gamma(T^*M)$, 对于切空间 $T_p M$, 其对偶空间是余切空间 $T_p^* M$, 因此可以定义考虑每一点线性 k -形式的全体 $\Lambda^k T_p^* M$, 仿照前面的过程可以为其并置 $\Lambda^k T^* M$ 赋予 $n + \binom{n}{k}$ 维光滑流形结构, 对应地, 其截面称为流形上的**微分 k -形式**.

定义 5.5 (微分 k -形式)

设 M 为光滑流形, 向量丛 $\Lambda^k T^* M$ 的截面称为 M 上的微分 k -形式, 光滑截面称为光滑 k -形式, 记全体光滑 k -形式的全体为 $\Gamma(\Lambda^k T^* M) := \Omega^k(M)$.



注 根据定义, $\omega \in \Omega^k(M)$ 在任意 $p \in M$ 指定了一个线性 k -形式; 由于高于 $n = \dim M$ 次的微分形式均为 0, 因此称 n -形式为最高形式. 特别地, 光滑 0-形式全体 $\Omega^0(M)$ 其实就是 $C^\infty(M)$

同样地, M 上任意 k -形式 ω 可以视为 $\Gamma(TM)^k$ 上的函数, 即

$$\omega(X^1, \dots, X^k)(p) = \omega_p(X_p^1, \dots, X_p^k),$$

并且对任意函数 h 有同样的交换性质.

命题 5.3

设 ω 为 M 上的 k -形式, 则对 M 上任意函数 h 以及向量场 $X^1, \dots, X^k$ 有

$$h\omega(X^1, \dots, X^i, \dots, X^k) = \omega(X^1, \dots, hX^i, \dots, X^k).$$



考虑 M 的坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$, 则对任意 $p \in U$, $T_p^* U$ 有一组基 $dx_p^1, \dots, dx_p^n$, 它们自然给出了 $\Lambda^k T_p^* U$ 的基

$$\{dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\},$$

即任意 $\omega_p \in \Lambda^k T_p^* U$ 有分解 $\omega_p = \sum a_{i_1 \dots i_k}(p) dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k}$, 也可在 U 上省略 p 写作

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

对于递增指标 $I = (i_1, \dots, i_k)$, 可以简记 $dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. 对于 $J = (j_1, \dots, j_k)$, 注意到

$$dx^I(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_k}) = \delta_{IJ},$$

因此

命题 5.4 (楔积的局部线性表示)

设 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 为 M 的坐标卡, 则对任意 $f^1, \dots, f^k \in C^\infty(U)$ 有

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^k = \sum \frac{\partial(f^1, \dots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$



根据前面的经验, 我们“相信”下面的结果是正确的.

命题 5.5 (k -形式的光滑性)

设 ω 为 M 上的 k -形式, 则下述等价:

1. ω 光滑.
2. M 有一组图册使得对其中任意 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, ω 在 U 上分解的系数光滑.
3. 对任意坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, ω 在 U 上分解的系数光滑.
4. 对任意光滑向量场 $X^1, \dots, X^k$, 函数 $\omega(X^1, \dots, X^k)$ 光滑.



¶ k -形式的拉回

前文中我们定义了 1-形式与 0-形式的拉回, 这可以被推广到一般情形, 对于光滑映射 $F: M \rightarrow N$, 其微分在每一点上有 (k -形式的) 拉回

$$(dF_p)^*: \Lambda^k T_{F(p)} N \rightarrow \Lambda^k T_p M, \quad (dF_p)^*(\omega_{F(p)})(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)),$$

将其整合起来定义为 F 的拉回 F^* .

定义 5.6 (k -形式的拉回)

设 $F: M \rightarrow N$ 为光滑映射, 定义其拉回为

$$F^*: \Lambda^k T_{F(p)} N \rightarrow \Lambda^k T_p M, \quad F^*(\omega_{F(p)})(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)).$$

注 特别地, 它将 N 中的 k -形式 ω 拉回为 M 中的 k -形式 $F^*\omega$ 使得 $(F^*\omega)_p = F^*(\omega_{F(p)})$.

命题 5.6 (拉回的线性性)

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, ω, τ 为 M 上的 k -形式, $a \in \mathbb{R}$, 则

$$F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau, \quad F^*(a\omega) = aF^*\omega.$$

¶ k -形式的楔积

对于两个微分形式, 可以定义逐点的楔积, 将其整合可以定义为微分形式的楔积.

定义 5.7 (微分形式的楔积)

设 ω, τ 为 M 上的 k -形式、 l -形式, 则定义其楔积为 $k+l$ -形式 $\omega \wedge \tau$, 满足

$$(\omega \wedge \tau)_p = \omega_p \wedge \tau_p, \quad \forall p \in M.$$

引理 5.4 (楔积保持光滑性)

若 ω, τ 都是 M 上的光滑形式, 则 $\omega \wedge \tau$ 也是光滑的.

证明 任取 M 的坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$, 设 $\omega = \sum a_I dx^I$, $\tau = \sum b_J dx^J$, 其中系数均光滑, 则其楔积为

$$\omega \wedge \tau = \sum a_I b_J dx^I \wedge dx^J = \sum \left(\sum_{I \sqcup J = K} \pm a_I b_J \right) dx^K,$$

因此系数依然光滑, 说明 $\omega \wedge \tau$ 光滑.

命题 5.7

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, ω, τ 为 M 上的微分形式, 则

$$F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau.$$

借助前面的讨论, 楔积实际上给出了光滑微分形式全体 $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ 的一个分次环结构, 因为

$$\wedge: \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M).$$

¶ k -形式的内乘

流形上, 内乘可逐点定义.

定义 5.8 (微分形式的内乘)

设 X 为 M 上的光滑向量场, 则对任意 k -形式 ω , 定义其内乘 $(\iota_X \omega)_p = \iota_{X_p} \omega_p$, 或者说

$$\iota_X \omega(X_2, \dots, X_k) = \omega(X, X_2, \dots, X_k).$$



注 内乘 $\iota_X : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ 是一个 -1 次反导子.

命题 5.8

设 X 为 M 上的光滑向量场, 则对任意 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\iota_{fX} \omega = f \iota_X \omega = \iota_X (f\omega).$$

**5.2.2 外微分****定义 5.9 (外微分算子)**

设 M 为光滑流形, 称 $D : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ 为外微分算子, 若其满足

1. D 是 1 次反导子.
2. $D^2 = D \circ D = 0$.
3. 对任意 $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ 以及向量场 X 有 $(Df)(X) = Xf$.



注 根据定义, 外微分算子 D 在 $f \in C^\infty(M)$ 上的作用恰好为其微分 df .

借助局部坐标, 可以给出外微分算子很直接的表示. 取坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$, 则任意 $\omega \in \Omega^k(M)$ 在 U 上有表示 $\omega = \sum a_I dx^I$, 其中 a_I 光滑, 因此根据定义有

$$D\omega = \sum (Da_I) \wedge dx^I + \sum a_I D(dx^I) = \sum \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I.$$

因此若外微分算子存在, 它在局部上必定是上述形式, 而对于存在性, 我们可以“不讲道理地”将上式作为 (U, ϕ) 上外微分算子 d_U 的定义.

与微分形式不同的是, 前者可以看作**逐点运算** (在每一点指定切空间的一个交错张量), 而外微分是**局部运算**, 它依赖一点附近的值, 一个经典的例子是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 f , $f'(x)$ 的取值仅依赖 f 在 x 附近的取值.

定义 5.10 (局部算子)

称 $D : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ 是局部算子, 若对任意 $\omega \in \Omega^k(M)$, 在某一开集 U 上 $\omega|_U \equiv 0$, 都有 $D\omega \equiv 0$.



注 这一定义暗示了若 ω, τ 在一个开集 U 上相等, 则它们在其上的外微分相等.

命题 5.9 (反导子的局部性)

$\Omega^*(M)$ 上的任何反导子都是局部算子.



注 这种证明方法也可以证明导子为局部算子 (在切空间见到过).

证明 设 $\omega \in \Omega^k(M), \omega|_U \equiv 0$, 下证对任意 $p \in M$ 有 $(D\omega)_p = 0$. 取 U 中的鼓包函数 f 使之在 p 附近取常值 1, 注意到对任意 $q \in M$, 必有 $\omega_q = 0$ 或 $f(q) = 0$, 因此 $f\omega = 0$, 这说明

$$0 = D(f\omega) = (Df) \wedge \omega + f \wedge (D\omega),$$

考虑 p 处的取值可得 $(D\omega)_p = 0$.

根据前面的讨论, 我们在局部定义出了外微分算子, 我们希望可以定义整体的外微分算子 d , 他在每一点 $p \in M$ 定义为某个坐标卡 U 上 d_U 的作用, 即

$$(d\omega)_p = (d_U \omega)_p.$$

下面证明这种整体定义是良好的, 并且进一步, 由此定义出的外微分算子是唯一的.

命题 5.10 (外微分的存在唯一性)

光滑流形 M 上的整体外微分是良定的, 并且这样定义出的外微分是唯一的.



证明 首先证明良定性, 设 $(U, x^1, \dots, x^n), (V, y^1, \dots, y^n)$ 为 p 处的两个坐标卡, 对于 $\omega = \sum a_I dx^I = \sum b_J dy^J \in \Omega^*(U \cap V)$, 定义

$$(d\omega)_p = (d_U \omega)_p = \left(\sum da_I \wedge dx^I \right)_p,$$

分别用 d_U, d_V 作用可得

$$d_U \omega = \sum da_I \wedge dx^I, \quad d_V \omega = \sum db_J \wedge dy^J,$$

而容易证明当 $\sum a_I dx^I = \sum b_J dy^J$ 时成立 $\sum da_I \wedge dx^I = \sum db_J \wedge dy^J$, 因此在 V 定义的 ω 的外微分在 p 处也是相同的, 良定性得证.

对于唯一性, 设 D 为另一个外微分, 易见 d, D 对 $\Omega^0(M)$ 取相同值, 根据反导子的局部性以及外微分的局部唯一性易证.

1-形式的微分与拉回可交换, 类似地, 外微分与拉回也可交换.

命题 5.11 (外微分与拉回可交换)

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, 则对任意 $\omega \in \Omega^k(M)$ 有 $dF^*\omega = F^*d\omega$.



证明 只需证明对任意 $p \in M$ 有 $(dF^*\omega)_p = (F^*d\omega)_p$, 因此可以不妨设在一个坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 上讨论. 设 $\omega = \sum a_I dy^I$, 则

$$dF^*\omega = d\left(\sum (a_I \circ F) dF^I\right) = \sum d(a_I \circ F) \wedge dF^I,$$

另一方面

$$\begin{aligned} F^*d\omega &= F^*\left(\sum da_I \wedge dy^I\right) \\ &= \sum F^*(da_I) \wedge F^*(dy^I) \\ &= \sum d(F^*a_I) \wedge dF^I \\ &= \sum d(a_I \circ F) \wedge dF^I, \end{aligned}$$

得证.

推论 5.4 (外微分与限制可交换)

设 U 为 M 的开集, 则对任意 $\omega \in \Omega^k(M)$ 有 $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$.



证明 设 $\iota: U \hookrightarrow M$ 为嵌入映射, 则 $\omega|_U = \iota^*\omega$, 因此由 d 与 ι^* 的交换性即得.

例 5.3 设 $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, 定义光滑映射

$$F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

则对于 $dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ 有拉回

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy) &= d(x \circ F) \wedge d(y \circ F) \\ &= d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) \\ &= [\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta] \wedge [\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta] \\ &= r dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

下面证明一个忽略的结论: 光滑形式的拉回依然光滑.

命题 5.12 (拉回保持光滑性)

设 $F: M \rightarrow N$ 光滑, 则对任意 $\omega \in \Omega^k(N)$, $F^*\omega \in \Omega^k(M)$.



证明 对任意 $p \in M$, 取 $p, F(p)$ 处的坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^m), (V, y^1, \dots, y^n)$ 使得 $F(U) \subset V$, 设 V 中有表示 $\omega = \sum a_I dy^I$, 则其拉回在 U 中有表示

$$F^*\omega = \sum (a_I \circ F) dF^I = \sum (a_I \circ F) \frac{\partial(F^{i_1}, \dots, F^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} dx^J,$$

根据系数的光滑性可知 $F^*\omega$ 在 U 中光滑, 得证.

因此, 光滑映射 $F: M \rightarrow N$ 的拉回 $F^*: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(N)$ 实际上是一个分次环同态.

例 5.4 借助外微分, 可以将梯度、散度、旋度统一起来:

- 对于 $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ 有 $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \nabla f$.
- 对于 $\alpha = f^1 dx + f^2 dy + f^3 dz$ 有 $d\alpha = (f_y^3 - f_z^2) dy \wedge dz + (f_z^1 - f_x^3) dz \wedge dx + (f_x^2 - f_y^1) dx \wedge dy = \nabla \times \alpha$.
- 对于 $\omega = f^1 dy \wedge dz + f^2 dz \wedge dx + f^3 dx \wedge dy$ 有 $d\omega = (f_x^1 + f_y^2 + f_z^3) dx \wedge dy \wedge dz = \nabla \cdot \omega$.

5.3 流形上的积分

5.3.1 定向

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 若两组基 $v_1, v_2, v_3; u_1, u_2, u_3$ 之间转移矩阵的行列式为正, 则称它们**定向相同** (反之称定向相反), 这一定义可以被直接推广到 $\mathbb{R}^n$ (或者说一般的实向量空间) 中.

定义 5.11 (实向量空间中的定向)

设 $\{u_1, \dots, u_n\}, \{v_1, \dots, v_n\}$ 为实向量空间 V 的两组基, $(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n)A$, 若 $\det A > 0$, 则称它们定向相同.



注 注意, 这里的顺序也是固定的.

下面的引理表明, 定向可以借助交错张量的作用计算.

引理 5.5

设 $\{u_1, \dots, u_n\}, \{v_1, \dots, v_n\}$ 为 V 的一组基, 设 $(u_1, \dots, u_n)^T = A(v_1, \dots, v_n)^T$, 则对任意 $\beta \in \Lambda^n V^*$ 有

$$\beta(u_1, \dots, u_n) = (\det A)\beta(v_1, \dots, v_n).$$



证明 根据 β 的线性性与反对称性可得

$$\beta(u_1, \dots, u_n) = \sum a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} \beta(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = \sum (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} \beta(v_1, \dots, v_n) = (\det A)\beta(v_1, \dots, v_n).$$

推论 5.5 (交错张量决定定向)

设 $\{u_1, \dots, u_n\}, \{v_1, \dots, v_n\}$ 为实向量空间 V 的两组基, 则二者正定向当且仅当对任意 $\beta \in \Lambda^n V^*$, 它在两组基上取值的符号相同.



注 我们称交错张量 β 确定了一个定向 $(v_1, \dots, v_n)$, 若 $\beta(v_1, \dots, v_n) > 0$, 由此可以给出 $\Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ 中的一个等价关系: $\beta \sim \beta' \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \beta = a\beta'$, 反过来, V 中的一个定向也可以由 $\Lambda^n V^* \cong \mathbb{R}$ 中这样一个等价关系确定.

¶ 流形上的定向

流形是曲线与曲面的高维推广，而曲面上我们借助标架给出局部的定向，流形也可以这样做（标架是截面的基）。对于光滑流形 M ，首先考虑开集 $U \subset M$ 上标架的等价关系： $(X_1, \dots, X_n) \sim (Y_1, \dots, Y_n)$ 当且仅当在任意 $p \in U$ 处，它们在 $T_p M$ 中取值的基定向相同。

定义 5.12 (流形上的定向)

设 M 为光滑流形，若 μ 在每一点 $p \in M$ 给出了 $T_p M$ 的一个定向，则称之为 M 上的逐点定向。称 μ 在 $p \in M$ 处连续，若存在邻域 $U \ni p$ 以及其上的连续标架 $Y^1, \dots, Y^n$ 使得 μ_q 恰好与 $Y_q^1, \dots, Y_q^n$ 给出的定向相同（对任意 $q \in U$ ）。若 μ 处处连续，则称之为 M 上的定向，并且称 M 是可定向的。

例 5.5

- 欧氏空间都是可定向的，它由整体光滑标架 $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ 给出。
- Mobius 带是不可定向的。

命题 5.13

连通可定向流形至多有两个定向。

证明 对 M 上的任意定向 μ, ν ，考虑函数

$$f: M \rightarrow \{\pm 1\}, \quad f(p) = \begin{cases} 1, & \mu_p = \nu_p, \\ -1, & \mu_p = -\nu_p, \end{cases}$$

对任意 $p \in M$ ，设在邻域 U 中 μ, ν 分别由连续标架 $X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n$ 确定，则标架的连续性蕴含转移矩阵的连续性，因此行列式也连续，而在 U 中行列式始终非零，因此在 U 上有 $\mu = \nu$ 或 $\mu = -\nu$ ，因此 f 是局部常值函数， M 连通说明 f 为常值函数，因此 M 上至多只有两个定向。

我们通过逐点定向 + 连续条件定义了流形上的定向，但这在实际应用中并不方便，下面我们讨论连续的逐点定向与光滑的恒非零最高形式之间的关系。

引理 5.6

设 $X^1, \dots, X^n$ 给出 M 上的逐点定向 μ ，则 μ 连续当且仅当对任意 $p \in M$ ，存在坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 使得函数 $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X^1, \dots, X^n) > 0$ 。

注 μ 连续并不意味着 $X^1, \dots, X^n$ 连续。

证明 $\Rightarrow$: 设 μ 连续，则对任意 $p \in M$ ，存在邻域 W 以及连续标架 $Y^1, \dots, Y^n$ 给出了 μ 在 U 中的逐点定向，由于 $(X^1, \dots, X^n)$ 与 $(Y^1, \dots, Y^n)$ 在 U 中给出相同定向，因此其转移矩阵的行列式恒正，只需证明 $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(Y^1, \dots, Y^n) > 0$ 。设 $(Y^1, \dots, Y^n)^T = B(\partial_1, \dots, \partial_n)^T$ ，则

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(Y^1, \dots, Y^n) = \det B,$$

不妨设 $\det B > 0$ （否则翻转 x^1 ），得证。

$\Leftarrow$: 设在 p 的邻域 U 中 $(X^1, \dots, X^n)^T = A(\partial_1, \dots, \partial_n)^T$ ，因此

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X^1, \dots, X^n) = \det A > 0,$$

这说明在 U 上 $X^1, \dots, X^n$ 给出的定向与 $\partial_1, \dots, \partial_n$ 相同，而后者光滑，因此 μ 在 p 处连续。

定理 5.1 (可定向性的最高形式刻画)

光滑流形 M 可定向当且仅当它存在一个处处不为零的光滑最高形式。

证明 $\Rightarrow$: 设 $X^1, \dots, X^n$ 给出 M 上的（连续）定向 μ ，则对任意 $p \in M$ ，存在坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 使得

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X^1, \dots, X^n) > 0,$$

设 $\{U_\alpha\}$ 为这些坐标邻域的全体, $\{\rho_\alpha\}$ 为相应的单位分解, 设

$$\omega = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} dx_{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha}^n \in C^{\infty}(M),$$

则对任意 $p \in M$ 有

$$\omega_p(X_p^1, \dots, X_p^n) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}(p)(dx_{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha}^n)_p(X_p^1, \dots, X_p^n) > 0,$$

因此 ω 即为一个处处非零的光滑最高形式.

$\Leftarrow$: 设 ω 为这样的最高形式, 取向量场 $X^1, \dots, X^n$ 使得 $\omega(X^1, \dots, X^n)$ 处处为正, 下证由 $X^1, \dots, X^n$ 给出的逐点定向 μ 是光滑的. 对任意 $p \in M$, 设 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 为一个连通坐标卡, 则在 U 中 $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ (f 光滑), 由连续性、连通性可不妨设 U 中 $f > 0$ (否则翻转 x^1), 因此由引理可知 μ 连续.

设 ω, ω' 为可定向流形 M 上两个恒非零的光滑最高形式, 则存在函数 f 使得 $\omega = f\omega'$, 通过在每个坐标卡上考虑, 可知 f 是恒非零的光滑函数, 若 M 连通, 则可断言 $f > 0$ 或 $f < 0$. 因此可定向流形 M 上恒非零的光滑最高形式可以分为两个等价类, 等价关系为

$$\omega \sim \omega' \Leftrightarrow \exists f \in C^{\infty}(M), f \neq 0, \omega = f\omega',$$

并且这两个等价类恰好可以对应 M 上的两种定向. 称 $X^1, \dots, X^n$ 的定向为 ω **确定的定向**, 若 $\omega(X^1, \dots, X^n) > 0$, 此时也称 ω 为 M 上的一个 **定向形式**. 因此, 一个可定向流形可以表示为 $(M, [\omega])$, $[\omega]$ 为上述一个等价类.

定义 5.13 (保定向微分同胚)

称微分同胚 $F: (M, [\omega_M]) \rightarrow (N, [\omega_N])$ 保定向, 若 $[F^*\omega_N] = [\omega_M]$; 称其反定向, 若 $[F^*\omega_N] = [-\omega_M]$. 

注 容易看出, 微分同胚或保定向, 或反定向.

命题 5.14

设 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 有标准定向, 则微分同胚 $F: U \rightarrow V$ 保定向当且仅当 Jacobi 行列式 $\det \partial_{x^j} F^i$ 在 U 中恒正. 

借助保定向微分同胚, 可以给出可定向性的图册刻画.

定义 5.14 (定向图册)

对于两个相交坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n), (V, y^1, \dots, y^n)$, 若 $\det \partial_{x^j} y^i$ 在 $U \cap V$ 恒正, 则称它们定向相容. 若 M 的图册 $\mathcal{A}$ 的所有坐标卡都定向相容, 则称它是一个定向图册. 

定理 5.2 (可定向性的图册刻画)

流形 M 可定向当且仅当它有一个定向图册. 

证明 $\Rightarrow$: 设 $X^1, \dots, X^n$ 给出 M 上的定向 μ , 则对任意 $p \in M$, 存在坐标卡 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 使得在 U 上

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \dots, X^n) > 0,$$

设 $\mathcal{U}$ 为这些坐标卡的全体, 下证这是一个定向图册. 设 $(U, x^1, \dots, x^n), (V, y^1, \dots, y^n)$ 为两个相交坐标卡, 则在 $U \cap V$ 上有

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \dots, X^n) > 0, \quad (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(X^1, \dots, X^n) > 0,$$

注意到 $dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = (\det \partial_{x^j} y^i) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 因此在 $U \cap V$ 上 $(\det \partial_{x^j} y^i) > 0$, 得证.

$\Leftarrow$: 设 $\mathcal{U}$ 为一个定向图册, 则对任意 $p \in M$, 取覆盖它的坐标卡 U , 将其上由 $\partial_1, \dots, \partial_n$ 给出的定向定义为 p 处的定向, $\mathcal{U}$ 中坐标卡的定向相容性说明这种定义是良好的, 它显然也是连续的.

与最高形式刻画相同, 这里“定向相容”也是一个等价关系, 并且它的等价类也对应可定向流形上的两种定向.

5.3.2 流形上的积分

下设 M 是 m 维光滑可定向流形, 固定一个定向 μ . 设 ω 为其上的一个最高形式, 为了定义 $\int_M \omega$, 先设其支在定向相容的坐标卡 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^m)$, 则存在支在 U 中的函数 f 使得 $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, 因此可定义

$$\int_U \omega = \int_U f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m,$$

右侧为 $\mathbb{R}^m$ 上的 Lebesgue 积分, 若 f 可积则称 ω 可积. 一个自然的问题是良定性, 若 U 中有两个定向相容的坐标系 $\{x_\alpha^i\}$ 和 $\{x_\beta^i\}$, 设

$$\omega = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m = f_\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m,$$

则根据 $dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m = \det d\phi_{\alpha\beta} dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m$ 可得 $f_\alpha = (\det d\phi_{\alpha\beta}) f_\beta$, 由于 $\det d\phi_{\alpha\beta} > 0$ (这里可以看出可定向性是必要的), 因此由积分换元公式可得

$$\int f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m = \int f_\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m,$$

因此 $\int_U \omega$ 是良定的.

对于一般的最高形式 $\omega \in \Omega^m(M)$, 取一个定向相容的局部有限坐标开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 以及相应的单位分解 $\{\rho_\alpha\}$, 可以定义

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

若上式对任意局部有限坐标覆盖以及相应单位分解都可积, 则称 ω 在 M 上可积. 下面验证良定性:

定理 5.3 (流形上积分的良定性)

设 ω 紧支, 则上述定义出的积分 $\int_M \omega$ 与 $\{U_\alpha\}$ 以及 $\{\rho_\alpha\}$ 的选取无关.

证明 设 $\{U_\alpha\}, \{U_\beta\}$ 为 M 的两个满足要求的覆盖, $\{\rho_\alpha\}, \{\rho_\beta\}$ 为相应的单位分解, 则 $\{U_\alpha \cap U_\beta\}$ 也是一个局部有限坐标覆盖, 并且 $\{\rho_\alpha \rho_\beta\}$ 是相应的单位分解, 对每个 α 有

$$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{U_\alpha} \left(\sum_\beta \rho_\beta \right) \rho_\alpha \omega = \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \rho_\beta \rho_\alpha \omega,$$

因此

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha\beta} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \omega,$$

同理可得 $\sum_\beta \int_{U_\beta} \rho_\beta \omega$ 也等于上式, 因此二者相等.

进一步, 可以将 $\mathbb{R}^m$ 中的换元公式推广到流形上.

定理 5.4 (流形上的积分换元公式)

设 M, N 都是 m 维可定向光滑流形, $f: M \rightarrow N$ 为微分同胚, 则

1. 若 ϕ 保定向, 则 $\int_M f^* \omega = \int_N \omega$.
2. 若 ϕ 反定向, 则 $\int_M f^* \omega = -\int_N \omega$.

证明 在局部上看, 这就是 $\mathbb{R}^m$ 中的换元公式.

5.4 带边流形与 Stokes 公式

这一小节是关于一种特殊的流形: 带边流形的讨论, 定义上半平面 (赋予空间拓扑)

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x^1, \dots, x^m) : x^m \geq 0\},$$

其中 $x^m > 0$ 的点称为**内点**, $x^m = 0$ 的点称为**边界点**.

 **笔记** 按照子空间拓扑的观点, 上半平面总是“相对开集”, 因此“边界点”也都在“内部”, 为了区分, 我们称在子空间拓扑下的概念为“拓扑内部”“拓扑边界”等, 在后面定义带边流形上也是一样的.

我们首先定义一般子集上函数的光滑性.

定义 5.15 (子集上的光滑性)

设 $S \subset \mathbb{R}^n$, 称其上的映射 $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $p \in S$ 处光滑, 若存在 p 的邻域 U 以及光滑映射 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得 $\tilde{f}|_{U \cap S} = f|_{U \cap S}$. 特别当 f 在任意 $p \in S$ 处光滑时, 称之在 S 上光滑.



注 借助一般子集上的光滑性, 也可以定义一般子集之间的微分同胚.

命题 5.15 (光滑性的等价刻画)

映射 $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ 光滑当且仅当存在 S 的开邻域 U 以及光滑函数 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得 $f = \tilde{f}|_S$.



注 换句话说, 光滑性等价于某种可延拓性.

证明 一边是显然的, 反之设 f 光滑, 则对任意 $p \in S$, 存在邻域 U_p 以及光滑映射 $f_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得 $f_p|_{U_p \cap S} = f|_{U_p \cap S}$, 所有 $\{U_p\}$ 构成 S 的开覆盖, 设对应的单位分解为 $\{\rho_p\}$, 令 $U = \bigcup_p U_p$, 考虑光滑映射

$$\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \tilde{f}(x) = \sum_p \rho_p(x) f_p(x),$$

注意到对任意 $x \in S$, 若 $x \in U_p$ 则 $f_p(x) = f(x)$, 若 $x \notin U_p$ 则 $\rho_p(x) = 0$, 因此 $f = \tilde{f}|_S$.

定理 5.5 (开集的光滑不变性)

设 $U, S \subset \mathbb{R}^n$, U 为开集, $f: U \rightarrow S$ 为微分同胚, 则 S 也是开集.



注 这里同维数是重要的条件, 例如 $\mathbb{R}$ 中的开集 $(0, 1)$ 与 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集 $(0, 1) \times \{0\}$ 微分同胚.

证明 $f: U \rightarrow S$ 为微分同胚说明存在 S 的开邻域 V 以及光滑映射 $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $g|_S = f^{-1}$, 因此 $g \circ f = \text{Id}_U$, 即得 $dg_{f(p)} \circ df_p = \text{Id}: T_p U \rightarrow T_p U$, 这说明 $df_p: T_p U \rightarrow T_{f(p)} V$ 为单射, 根据维数可知 df_p 为线性同构, 根据反函数定理, f 为 p 处的局部微分同胚, 即存在 $p, f(p)$ 的邻域 $U_p, V_{f(p)}$ 使得 $f: U_p \rightarrow V_{f(p)}$ 为微分同胚, 因此 $f(p) \in V_{f(p)} = f(U_p) \subset f(U) = S$, 这说明 $f(p)$ 为 S 的内点, 得证.

推论 5.6

设 U, V 为上半平面 $\mathbb{R}_+^n$ 中的开集, $f: U \rightarrow V$ 为微分同胚, 则 f 将内点映为内点, 将边界点映为边界点.



5.4.1 带边流形

定义 5.16 (带边流形)

称 T2+A2 空间 M 为 n 维带边流形, 若对任意 $p \in M$, 存在邻域 U 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}_+^n$.



注 对于带边流形 M , 定义其边界 $\partial M = \{x \in M: x \text{ 无同胚于 } \mathbb{R}^n \text{ 的邻域}\}$, 定义其内部 $M^\circ = M \setminus \partial M$. 另外, 拓扑流形可以视为边集为空的带边流形.

对于流形的边界, 容易验证如下命题:

命题 5.16 (带边流形的边界)

- $p \in \partial M$ 当且仅当存在 p 处的坐标卡 $(\phi, U, \mathbb{R}_+^n)$ 使得

$$\phi(p) \in \partial \mathbb{R}_+^n = \{(x^1, \dots, x^m): x^m = 0\}.$$

- n 维带边流形 M 的边界 ∂M 是一个 $n-1$ 维拓扑流形 (无边).



类似地, 对于带边流形的两个坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$, 若其转移映射

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}_+^n$$

光滑, 则称它们**光滑相容**, 进一步可以定义出带边流形的光滑结构, 进而定义“带边光滑流形”(有时会简称“带边流形”).

特别地, 对于光滑带边流形的坐标卡 (U, ϕ) , 其限制 $\phi' = \phi|_{U \cap \partial M} : U \cap \partial M \rightarrow \partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$ 也是同胚, 对于两个坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$, 其限制之间有光滑转移映射

$$\psi' \circ (\phi')^{-1} : \phi'(U \cap V \cap \partial M) \rightarrow \psi'(U \cap V \cap \partial M),$$

因此 M 上的光滑图册 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 实际上诱导了 ∂M 上的光滑图册 $\{U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M}\}$, 因此:

定理 5.6 (边界的光滑结构)

n 维光滑带边流形 M 的边界 ∂ 是一个 $n-1$ 维光滑流形.



进一步, 切空间/切丛、余切空间、切丛、微分形式等概念都能推广到带边流形上, 只不过这时对任意 $p \in M, X_p \in T_p M$, 未必存在曲线 γ 使得 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = X_p$, 例如考虑 $\mathbb{R}_+^2$ 以及原点, 切向量 $\partial_y|_{(0,0)}$.

定义 5.17 (内/外向向量场)

称带边流形 M 上的向量场 X 是内向的, 若对任意 $p \in \partial M$, 存在曲线 $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ 使得 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = X_p, \gamma((0, \varepsilon)) \subset M^\circ$. 称 X 是外向的, 若 $-X_p$ 是内向的.



另外, 称向量场 X 是沿边的, 若对任意 $p \in \partial M, X_p \in T_p M$ (而不是 $T_p(\partial M)$).

命题 5.17 (沿边外向向量场的存在性)

对任意带边光滑流形 M , 都存在一个光滑的沿边外向向量场.



证明 设 $\{(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$ 为 M 中坐标卡构成的 ∂M 的覆盖, 设 U_α 中的向量场, $X^\alpha = -\partial_{x_\alpha^n}$, 则它在 $U_\alpha \cap \partial M$ 上光滑且外向, 设 $\{\rho_\alpha\}$ 为相应于 $\{U_\alpha \cap \partial M\}$ 的单位分解, 则 $X = \sum \rho_\alpha X^\alpha$ 就是一个满足要求的向量场.

5.4.2 带边流形的定向

与光滑流形相同, 带边流形的定向也指“连续的逐点定向”, 进而一些可定向性的刻画依然成立 (这并没有什么特别之处). 进一步, 带边可定向流形的边界实际上也是可定向的, 并且其中一个定向可由 M 的定向诱导出.

命题 5.18

设 M 为 n 维光滑带边流形, ω 为 M 上的一个定向形式, X 为 ∂M 上的光滑外向向量场, 则 $\iota_X \omega$ 是 ∂M 的光滑恒非零最高 $(n-1)$ 形式, 因此 ∂M 是可定向的.



注 由 $\iota_X \omega$ 给出的 ∂M 的定向称为**边界定向**.

证明 X, ω 光滑说明 $\iota_X \omega$ 光滑, 设 $\iota_X \omega$ 在某个 $p \in \partial M$ 处为 0, 则对任意 $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p(\partial M)$ 都有

$$\iota_X \omega(v_1, \dots, v_{n-1}) = 0,$$

若取 $T_p(\partial M)$ 的基 $e_1, \dots, e_{n-1}$, 则 $X_p, e_1, \dots, e_{n-1}$ 恰好是 $T_p M$ 的一组基, 而

$$\omega_p(X_p, e_1, \dots, e_{n-1}) = (\iota_X \omega)_p(e_1, \dots, e_{n-1}) = 0,$$

这说明 $\omega_p \equiv 0$, 矛盾.

推论 5.7

设 M 是可定向带边流形, $p \in \partial M$, 则 $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p(\partial M)$ 在 p 处给出的定向与其边界定向相同当且仅当 $X_p, v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p M$ 给出的定向与 M 在 p 处的定向相同.



证明 $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p(\partial M)$ 在 $p \in \partial M$ 处给出边界定向的相同定向当且仅当

$$(\iota_{X_p} \omega_p)(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega_p(X_p, v_1, \dots, v_{n-1}) > 0,$$

当且仅当 $X_p, v_1, \dots, v_{n-1}$ 在 $p \in M$ 处给出相同定向.

例 5.6 $\mathbb{R}_+^n$ 上有标准定向形式 $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, 其边界上的一个光滑外向形式为 $-\partial_{x^n}$, 因此边界定向为

$$\iota_{-\partial_{x^n}} \omega = \iota_{-\partial_{x^n}} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1},$$

例如在 $\mathbb{R}_+^3$ 中, 其标准定向给出的边界定向恰好与“右手定则”相反.

5.4.3 Stokes 公式**定理 5.7 (Stokes 公式)**

对任意 n 维带边流形 M 以及紧支集 $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ 有

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega.$$



证明 【STEP 1. ω 支在某个 $U \cong \mathbb{R}^n$ 中】

此时 ω 在 ∂M 上恒为零, 因此 $\int_{\partial M} \omega = 0$, 设 U 中

$$\omega = \sum (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

其中每个 f_i 都是紧支集光滑函数, 则其微分

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

等式成立.

【STEP 2. ω 支在某个 $U \cong \mathbb{R}_+^n$ 中】

保持上述记号, 只有最后一项不同, 即

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^n \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

另一方面在 ∂M 上 $x^n = 0$, 因此 $\iota_{\partial M}^* \omega = 0$, 因此

$$\iota_{\partial M}^* \omega = -f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)(-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1},$$

积分可得

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1},$$

等式成立.

【STEP 3. 一般情形】

设 $\{U_\alpha\}, \{\rho_\alpha\}$ 为 M 的覆盖以及相应的单位分解, 则

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \sum_\alpha \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* (\rho_\alpha \omega) = \sum_\alpha \int_M d(\rho_\alpha \omega) = \int_M d\omega.$$

散度

定义 5.18 (散度)

设 M 为光滑流形, μ 为其上的体积形式, 对任意 $X \in \Gamma(TM)$, 定义 X 关于 μ 的散度 $\operatorname{div} X$ 为

$$\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div}_\mu X) \mu.$$

注 根据 Cartan 神奇公式可得 $\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div} X) \mu = d\iota_X \mu$, 因此对任意 $g \in C^\infty(M)$ 有

$$(\operatorname{div} gX) \mu = \mathcal{L}_{gX} \mu = d(g\iota_X \mu) = dg \wedge \iota_X \mu + g(\operatorname{div}_\mu X) \mu = X(g) \mu + (\operatorname{div} X) \mu,$$

这说明 $\operatorname{div}_\mu(gX) = g\operatorname{div}_\mu X + X(g)$.

命题 5.19 (Gauss 公式)

设 M 为带边流形, 则有

$$\int_M (\operatorname{div}_\mu X) \mu = \int_{\partial M} \iota_X \mu.$$

证明

$$\int_M (\operatorname{div}_\mu X) \mu = \int_M \mathcal{L}_X \mu = \int_M d\iota_X \mu = \int_{\partial M} \iota_X \mu.$$

对于无边流形 M 上的预紧区域 Ω , 可定义其关于 μ 的体积为

$$\operatorname{Vol}_\mu(\Omega) = \int_\Omega \mu,$$

设 X 为 M 上的完备向量场, ϕ_t 为其生成的流, 记 $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$, 则根据上面的结果可得 Ω 在流下的体积变化规律:

命题 5.20 (体积的变分)

设 X 为 M 上的光滑向量场, $\Omega \subset M$ 为有光滑边界的预紧区域, 则

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Vol}(\Omega_t) = \int_\Omega (\operatorname{div}_\mu X) \mu = \int_{\partial \Omega} \iota_X \mu.$$

注 这里也给出了散度的一个几何意义.

Moser's trick

命题 5.21

设 M 为紧可定向流形, Ω_0, Ω_1 为两个体积形式, 则 $\int_M \Omega_0 = \int_M \Omega_1$ 当且仅当存在 M 的微分自同胚 ϕ 使得 $\Omega_0 = \phi^* \Omega_1$.

证明 一边是显然的, 设 $\int_M \Omega_0 = \int_M \Omega_1$, 由于 $H_{dR}^n(M) \cong \mathbb{R}$, 因此 $\Omega_0 - \Omega_1 = d\sigma$, 令 $\Omega_t = t\Omega_1 + (1-t)\Omega_0$, 它仍为体积形式, 对任意 $t \in [0, 1]$, 存在向量场 X_t 使得 $\iota_{X_t} \Omega_t = \sigma$, 设 $\{\phi_X^t\}$ 为 X_t 生成的流, 则

$$\begin{aligned} \frac{d(\phi_X^t)^* \Omega_t}{dt} &= (\phi_X^t)^* (\mathcal{L}_{X_t} \Omega_t) + (\phi_X^t)^* \left(\frac{d\Omega_t}{dt} \right) \\ &= (\phi_X^t)^* (d\iota_{X_t} \Omega_t) + (\phi_X^t)^* (\Omega_1 - \Omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\phi_X^t)^* d\sigma + (\phi_X^t)^* (-d\sigma) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此 $(\phi_X^t)^* \Omega_t = \text{Const}$, 即 $(\phi_X^1)^* \Omega_1 = \Omega_0$.

第 6 章 De Rham 理论

6.1 de Rham 上同调

6.1.1 de Rham 上同调群

定义 6.1 (闭形式与恰当形式)

设 M 为光滑流形, $\omega \in \Omega^k(M)$.

- 若 $d\omega = 0$, 则称 ω 为 k 次闭形式.
- 若存在 $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ 使得 $\omega = d\eta$, 则称 ω 为 k 次恰当形式.



注 M 上 k 次闭形式、恰当形式的全体记为 $Z^k(M), B^k(M)$.

例 6.1 设 $\dim M = m$, 则

- 对任意 $k > m$ 有 $B^k(M) = Z^k(M) = \{0\}$.
- 当 $k = m$ 时 $Z^m(M) = \Omega^m(M)$.
- 当 $k = 0$ 时 $B^0(M) = \{0\}$, $Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M) : df = 0\} \cong \mathbb{R}^K$, K 为 M 连通分支的个数.

根据定义有

$$Z^k = \text{Ker } d|_{\Omega^k(M)}, \quad B^k = \text{Im } d|_{\Omega^{k-1}(M)},$$

由于 $d^2 = 0$, 因此作为向量空间 (或者仅作为加法群) 有 $B^k(M) \subset Z^k(M) \subset \Omega^k(M)$, 通过作商可定义

定义 6.2 (de Rham 上同调群)

设 M 为光滑流形, 定义其 k 阶 de Rham 上同调群为商空间

$$H_{dR}^k(M) := Z^k(M) / B^k(M).$$



注 de Rham 上同调群中的元素称为上同调类.

例 6.2

- 设 $\dim M = m$, M 有 K 个连通分支, 则

$$H_{dR}^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^K, & k = 0, \\ \{0\}, & k > m. \end{cases}$$

- 考虑 $M = \mathbb{R}$, 则 $H_{dR}^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, 另外 $Z^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R})$, $\omega = gdt = dG$ 当且仅当

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

因此 $B^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R}) = Z^1(\mathbb{R})$, 进而对任意 $k \geq 1$ 都有 $H_{dR}^k(\mathbb{R}) \cong \{0\}$.

作为线性空间, $H_{dR}^k(M)$ 可能是无穷维的, 但后面会证明, 对许多光滑流形 (包括所有紧流形) 而言, 它都是有限维的.

定义 6.3 (Betti 数与 Euler 示性数)

设 M 为光滑流形, 若对任意 k 有 $\dim H_{dR}^k(M) < \infty$, 则定义其 k 阶 Betti 数为 $b_k(M) = \dim H_{dR}^k(M)$, 定义其 Euler 示性数为

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k(M).$$



注 由于 k 充分大时 $H_{dR}^k(M) = \{0\}$, 因此当 Betti 数有定义时 $\chi(M)$ 总是有限和.

¶ 两个例子

例 6.3 $\mathbb{R}^2$ 的 de Rham 上同调群 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ 说明对 $k > 2$ 都有 $H_{dR}^k(\mathbb{R}^2) = \{0\}$. 其连通说明 $H_{dR}^0(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}$, 注意到 $Z^1(\mathbb{R}^2) = B^1(\mathbb{R}^2)$, $Z^2(\mathbb{R}^2) = B^2(\mathbb{R}^2)$, 因此

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^2) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

事实上, 这一结果对更高维的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 也是成立的, 这在后面可以由上同调群的同伦不变性看出, 称为 Poincaré 引理.

例 6.4 S^1 的 de Rham 上同调群 $\dim S^1 = 1$ 以及其连通说明 $H_{dR}^0(S^1) = \mathbb{R}$, 对任意 $k > 1$ 有 $H_{dR}^k(S^1) = \{0\}$, 下面计算 $H_{dR}^1(S^1)$.

由于 $Z^1(S^1) = \Omega^1(S^1)$, 考虑线性映射

$$\phi : Z^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\omega) = \int_{S^1} \omega,$$

在前面的章节中, 我们通过考虑映射 $h : \mathbb{R} \rightarrow S^1, h(t) = (\cos t, \sin t)$ 以及嵌入 $\iota : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, 给出了 S^1 的参数化 $F = h \circ \iota : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$, 并进一步得到了 S^1 上一个恒非零的 1-形式 $\omega = -ydx + xdy$, 并且 $F^*\omega = \iota^*h^*\omega = i^*dt = dt$, 因此

$$\phi(\omega) = \int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} F^*\omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

这说明 ϕ 是满射. 另外若 $\alpha = f\omega \in \text{Ker } \phi$, 设 $\bar{f} = h^*f = f \circ h \in \Omega^0(\mathbb{R})$ (这是一个周期函数), 则

$$0 = \int_{S^1} \alpha = \int_0^{2\pi} F^*\alpha = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t)dt,$$

这当且仅当 $\bar{f} = 0$, 即 $\alpha = 0$, 因此 ϕ 是线性同构, 而 $B^1(S^1) \subset \text{Ker } \phi$, 因此 $H_{dR}^1(S^1) \cong \mathbb{R}$, 综上可得

$$H_{dR}^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

¶ de Rham 上同调的函子性

对任意光滑映射 $F : M \rightarrow N$, 有拉回 $F^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$, 借助下述引理, 拉回可以诱导对应 de Rham 上同调群之间的同态 (或者说线性同态).

引理 6.1 (拉回映射保持闭与恰当)

光滑映射 $F : M \rightarrow N$ 的拉回 $F^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ 将闭形式拉回为闭形式, 将恰当形式拉回为恰当形式.



证明 设 $d\omega = 0$, 借助拉回与外微分的交换性可知 $dF^*\omega = F^*d\omega = 0$, 即 $F^*\omega$ 闭; 另外若 $\omega = d\tau$ 则 $F^*\omega = dF^*\tau$, 即 $F^*\omega$ 恰当.

注 因此若 $[\eta_1] = [\eta_2]$ 则 $[F^*\eta_1] = [F^*\eta_2]$.

定义 6.4 (de Rham 上同调群的拉回)

对任意光滑映射 $F : M \rightarrow N$ 以及 $k \in \mathbb{N}$, 称同态

$$F^\# : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M), \quad [\eta] \mapsto [F^*\eta]$$

为 F 诱导的 de Rham 上同调群的拉回.



命题 6.1 (de Rham 上同调群拉回的反变函子性)

- 恒同映射 $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ 的拉回 $\text{Id}_M^\# : H_{dR}^k(M) \rightarrow H_{dR}^k(M)$ 也是恒同映射.
- 设 $F : M \rightarrow N, G : P \rightarrow M$, 则 $(G \circ F)^\# = F^\# \circ G^\#$.

推论 6.1 (微分同胚不变性)

若 $F : M \rightarrow N$ 为微分同胚, 则对任意 k , 拉回 $F^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)$ 为同构.

推论 6.2 (微分同胚不变量)

若光滑流形 M, N 同胚且其 Betti 数有定义, 则 $b_k(M) = b_k(N), \chi(M) = \chi(N)$.

¶ de Rham 上同调的环结构

回忆 $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$ 就是楔积下的分次环; 类似地, 可以定义也使得所有 $H_{dR}^k(M)$ 构成分次环. 我们希望自然地定义“上积” $[\omega] \cup [\eta] = [\omega \wedge \eta]$, 注意到

- 设 $\omega \in Z^k(M), \eta \in Z^l(M)$, 则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta = 0,$$

即 $\omega \wedge \eta \in Z^{k+l}(M)$.

- 对任意 $\xi_1 \in \Omega^{k-1}(M), \xi_2 \in \Omega^{l-1}(M)$ 有

$$(\omega + d\xi_1) \wedge (\eta + d\xi_2) = \omega \wedge \eta + d[(-1)^k \omega \wedge \xi_2 + (-1)^{k-1} \xi_1 \wedge \eta + (-1)^{k-1} \xi_1 \wedge d\xi_2],$$

即 $[\omega] \cup [\eta]$ 是良定的.

定义 6.5 (上同调类的上积)

设 M 为光滑流形, 定义 $[\omega] \in H_{dR}^k(M), [\eta] \in H_{dR}^l(M)$ 的上积为

$$[\omega] \cup [\eta] := [\omega \wedge \eta] \in H_{dR}^{k+l}(M).$$

命题 6.2 (de Rham 上同调环)

对于光滑流形 M , 上积给出了一个分次环结构 $H_{dR}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_{dR}^k(M)$, 称为 de Rham 上同调环.

注 如此来看, 光滑映射的拉回实际上是分次环同态.

6.1.2 同伦不变性

下面将证明, de Rham 上同调群不止是微分同胚下的不变量, 它还是同伦不变量.

定理 6.1 (de Rham 上同调群的同伦不变性)

若 $M \simeq N$, 则对任意 k 有 $H_{dR}^k(M) \cong H_{dR}^k(N)$.

注 定理细节在后文补充.

证明 设 $\phi : M \rightarrow N, \psi : N \rightarrow M$ 连续且

$$\phi \circ \psi \simeq \text{Id}_N, \quad \psi \circ \phi \simeq \text{Id}_M,$$

根据定理 2.19 不妨设 ϕ, ψ 光滑, 则根据定理 6.3 有

$$\begin{aligned} \psi^\# \circ \phi^\# &= \text{Id} : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(N), \\ \phi^\# \circ \psi^\# &= \text{Id} : H_{dR}^k(M) \rightarrow H_{dR}^k(M), \end{aligned}$$

因此 $\psi^\#, \phi^\#$ 是线性同构.

注 这一事实表明 de Rham 上同调群是同伦不变量, 进而是同胚不变量, 因此它实际上只依赖光滑流形 M 的拓扑结构, 与光滑结构无关. 而对任意拓扑空间可以定义只依赖拓扑结构的奇异上同调群 $H_{sing}^k(X, \mathbb{R})$, 著名的 de Rham 定理断言:

定理 6.2 (de Rham 定理)

对任意 k 有 $H_{dR}^k(M) \cong H_{sing}^k(M)$.

借助同伦不变性, 可以直接计算 $\mathbb{R}^n$ 中星形区域的上同调群.

命题 6.3 (Poincare 引理)

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的星形区域, 则对任意 $k \geq 1$ 有 $H_{dR}^k(U) = \{0\}$.

根据定义, $H_{dR}^k(U) = \{0\}$ 实际上是指 $Z^k(U) = B^k(U)$, 即所有闭形式都恰当. 流形是局部欧的, 在局部有与星形区域同胚的开邻域, 因此可得闭形式的“局部恰当性”.

推论 6.3 (闭形式的局部恰当性)

对任意 $k \geq 1$ 次闭形式 $\omega \in Z^k(M)$ 以及 $p \in M$, 存在邻域 U 以及 $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ 使得在 U 上 $\omega = d\eta$.

同伦不变性的证明细节: 函子同伦不变性

我们希望证明下述命题:

定理 6.3 (de Rham 上同调函子的同伦不变性)

设 $f, g \in C^\infty(M, N)$ 同伦, 则它们有相同的拉回 $f^* = g^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)$.

若设 $F : M \times I$ 为 f, g 之间的光滑同伦 (定理 2.20), 并记光滑映射

$$i_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}, \quad i_t(x) = (x, t),$$

则 $f = F \circ i_0, g = F \circ i_1$, 并且 $f^* = i_0^* \circ F^*, g^* = i_1^* \circ F^*$, 因此只需证明 $i_0^* = i_1^*$, 而根据命题 A.11, 只需构造 i_0^*, i_1^* 之间的上链同伦 (注意, i_0, i_1 之间有显然的同伦 $\text{Id}_{M \times I}$, 我们将其视为 $\text{Id}_{M \times \mathbb{R}}$ 的限制). 设 $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ 为投影, 证明分为如下三部分:

- 证明 $M \times \mathbb{R}$ 上任何微分形式都有某种局部有限分解.
- 构造 i_0^*, i_1^* 之间的上链同伦.
- 验证构造的正确性.

【STEP 1. 局部有限分解】

首先证明, $M \times \mathbb{R}$ 上的微分形式都可以分解为如下两种形式的局部有限和:

- $f(x, t)\pi^*\eta$.
- $f(x, t)dt \wedge \pi^*\eta$.

其中 $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R}), \eta \in \Omega^*(M)$.

引理 6.2

设 U 为 M 中的开集, $\tau \in \Omega^k(U)$ 支在 M 的包含于 U 中的闭集内, 则它可以零延拓为 M 上的光滑 k -形式.

设 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 为 M 的坐标卡, $\{\rho_\alpha\}$ 为相应的单位分解, 借此可以给出 $M \times \mathbb{R}$ 的开覆盖 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}$, 并且 $\{\pi^*\rho_\alpha\} = \{\rho_\alpha \circ \pi\}$ 恰好为其相应的单位分解, 设 $\omega \in \Omega^*(M \times \mathbb{R})$ 则

$$\omega = \sum_{\alpha} (\pi^*\rho_\alpha)\omega = \sum_{\alpha} \omega_\alpha,$$

其中 $\text{supp } \omega_\alpha \subset \text{supp } \pi^* \rho_\alpha \subset \pi^{-1} U_\alpha$, 设 $\phi_\alpha = (x^1, \dots, x^n)$, 则 $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{R}$, 因此 $\pi^* x^1, \dots, \pi^* x^n, t$ 构成 $U_\alpha \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ 的一组坐标系, 设

$$\omega_\alpha = \sum_I a_I d\pi^* x^I + \sum_J b_J dt \wedge d\pi^* x^J,$$

其中 $a_I, b_J \in C^\infty(U_\alpha \times \mathbb{R})$, 这就对每个 ω_α 给出了我们想要的分解, 下一步自然是将其延拓、整合回 ω 中.

由于 a_I, b_J 在闭集 $\text{supp } \omega_\alpha \subset U_\alpha \times \mathbb{R}$ 中, 因此根据引理, 它们可以被零延拓到 $M \times \mathbb{R}$ 上, 但每个 $d\pi^* x^I$ 并不能直接延拓, 但是根据光滑 Uryshon 引理, 存在 M 上的一族光滑函数 $\{g_\alpha\}$ 使得

$$g_\alpha|_{\text{supp } \rho_\alpha} \equiv 1, \quad \text{supp } g_\alpha \subset U_\alpha,$$

进而 $\pi^* g_\alpha$ 在 $\text{supp } \pi^* \rho_\alpha$ 上恒为 1 且 $\text{supp } \pi^* g_\alpha \subset U_\alpha \times \mathbb{R}$, 因此 $\omega_\alpha = (\pi^* g_\alpha) \omega_\alpha$, 进而有分解

$$\omega_\alpha = \sum_I a_I \pi^*(g_\alpha dx^I) + \sum_J b_J dt \wedge \pi^*(g_\alpha dx^J),$$

这时 $\text{supp } g_\alpha \subset U_\alpha$ 是 M 中的闭集, 因此 $g_\alpha dx^I$ 可被零延拓到 M 上, 综上即得

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha = \sum_{\alpha, I} a_I^\alpha \pi^*(g_\alpha dx_\alpha^I) + \sum_{\alpha, J} b_J^\alpha dt \wedge \pi^*(g_\alpha dx_\alpha^J).$$

特别地, 当固定 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}, \{\rho_\alpha, g_\alpha\}$ 后这种分解是唯一的.

【STEP 2. 构造上链同伦】

直接定义 -1 次线性映射 $K: \Omega^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^*(M)$, 它对两种微分形式有

$$K(f\pi^*\eta) = 0, \quad K(fdt \wedge \pi^*\eta) = \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) \eta,$$

并且对局部有限和具有线性性:

$$K(\omega) = K\left(\sum_\alpha \omega_\alpha\right) = \sum_{\alpha, J} \left(\int_0^1 b_J^\alpha(x, t) dt \right) g_\alpha dx_\alpha^J.$$

根据分解的唯一性可知 K 良定, 而事实上, K 是满足上述三条要求的唯一的 -1 次线性映射.

【STEP 3. 验证上链同伦】

对于前面定义出的 K , 我们将证明

$$i_1^* - i_0^* = dK + Kd,$$

即 K 就是二者之间的上链同伦.

引理 6.3

- 外微分算子 d 对局部有限和具有线性性.
- 光滑映射的拉回对局部有限和具有线性性.



根据 K, d, i_0^*, i_1^* 对局部有限和的线性性, 只需分别验证等式对 STEP 1 提到的两种情形成立. 对第一种有

$$\begin{aligned} dK(f\pi^*\eta) + Kd(f\pi^*\eta) &= K\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge \pi^*\eta + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \pi^* dx^i \wedge \pi^*\eta + f\pi^* d\eta\right) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt\right) \eta \\ &= [f(x, 1) - f(x, 0)]\eta = (i_1^* - i_0^*)(f\pi^*\eta). \end{aligned}$$

对于第二种, 由于 $i_1^* dt = di_1^* t = d(1) = 0$ (i_0^* 同理), 因此一边有

$$(i_1^* - i_0^*)(fdt \wedge \pi^*\eta) = 0,$$

而另一边

$$dK(fdt \wedge \pi^*\eta) = d\left[\left(\int_0^1 f(x, t) dt\right) \eta\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \int_0^1 f(x, t) dt \right) dx^i \wedge \eta + \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) d\eta \\
&= \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x, t) dt \right) dx^i \wedge \eta + \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) d\eta, \\
Kd(fdt \wedge \pi^* \eta) &= K \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dt \wedge \pi^* \eta - f dt \wedge d\pi^* \eta \right) \\
&= - \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x, t) dt \right) dx^i \wedge \eta - \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) d\eta,
\end{aligned}$$

因此也有 $dK + Kd = i_1^* - i_0^*$, 得证.

6.2 Mayer-Vietoris 序列

M-V 序列之于 de Rham 上同调群很像 van Kampen 定理之于基本群, 它们都建立了子结构于整体结构之间的联系, 不过 M-V 序列要比 van Kampen 简单得多. 这一部分的大体思路类似 Zig-Zag 定理, 不过除了直接调用这一结果, 一些具体的构造也值得关注.

6.2.1 Mayer-Vietoris 序列

若 $\{U, V\}$ 是 M 的开覆盖, 设 ι_U, ι_V 为两个包含映射, 则其有拉回

$$\iota_U^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U), \quad \iota_V^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(V),$$

并且它们恰好是“限制映射”, 借此可定义

$$i : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V), \quad \omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V),$$

另外考虑 $U \cap V$ 到 U, V 的嵌入 j_U, j_V , 同样可由其拉回 j_U^*, j_V^* 定义

$$j : \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V), \quad (\omega, \tau) \mapsto \tau|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}$$

相比 i , 映射 j 的定义比较奇怪, 这是为了下述定理服务:

命题 6.4 (一些短正合列)

对任意 $k \geq 0$ 有短正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

证明 取 $\{\rho_U, \rho_V\}$ 为从属于 $\{U, V\}$ 的单位分解.

- $M = U \cup V$ 说明 i 为单射.
- 一方面显然 $\text{Im } i \subset \text{Ker } j$, 另一方面若 $\tau|_{U \cap V} = \omega|_{U \cap V}$ 则可定义 $\omega \in \Omega^k(M)$, 它在 U, V 上同 ω, τ 取值, 因此 $\text{Im } i = \text{Ker } j$.
- 对任意 $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$, 定义 ω_U, ω_V 分别为 $(\rho_V \omega)|_{U \cap V}, (\rho_U \omega)|_{U \cap V}$ 向 U, V 零延拓的结果, 则

$$j(-\omega_U, \omega_V) = \omega_V|_{U \cap V} + \omega_U|_{U \cap V} = \rho_U \omega + \rho_V \omega = \omega.$$

注 这种“交叉延拓”的方法是为了避免边界点出问题.

上述命题说明有上链复形的正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{i} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{j} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

这可以诱导一系列短链 $H_{dR}^k(M) \rightarrow H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \rightarrow H_{dR}^k(U \cap V)$, 进而由 Zig-Zag 定理可以给出一个重要的长正合列:

定理 6.4 (Mayer-Vietoris 序列)

设 $\{U, V\}$ 为 M 的开覆盖, 则有长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_{dR}^{k+1}(M) & \xrightarrow{i^*} & H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) & \xrightarrow{j^*} & \cdots \\ & \searrow & & \searrow & & \\ & & & d^* & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ \rightarrow & H_{dR}^k(M) & \xrightarrow{i^*} & H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) & \xrightarrow{j^*} & H_{dR}^k(U \cap V) & \rightarrow \\ & \searrow & & \searrow & & \\ & & & d^* & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{i^*} & H_{dR}^{k-1}(U) \oplus H_{dR}^{k-1}(V) & \xrightarrow{j^*} & H_{dR}^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow \end{array}$$

其中 i^*, j^* 为 i, j 的诱导映射.



注 注意到序列起始的 $H_{dR}^0(M) \rightarrow H_{dR}^0(M)$ 为单射, 因此可以添加 0 写作 $0 \rightarrow H_{dR}^0(M) \rightarrow H_{dR}^0(M)$.

定理的证明没什么好说的, 比较重要的一点是**转移映射** d^* 的构造. 如果直接从 Zig-Zag 的角度来看, 它定义为

$$d^*([\omega]) = [i^{-1} \circ d \circ j^{-1}(\omega)],$$

而在 de Rham 上同调理论中, 它有一些具体的内涵: 对任意 $\omega \in Z^k(U \cap V)$, 可令 (它在 $U \cap V$ 上良定)

$$\eta = \begin{cases} -d(\rho_V \omega), & \text{on } U, \\ d(\rho_U \omega), & \text{on } V, \end{cases}$$

则恰好有

$$\begin{aligned} d^*([\omega]) &= [i^{-1} \circ d \circ j^{-1}(\omega)] \\ &= [i^{-1} \circ d(-\rho_V \omega, \rho_U \omega)] \\ &= [i^{-1}(-d(\rho_V \omega), d(\rho_U \omega))] \\ &= [\eta]. \end{aligned}$$

6.2.2 一些应用**球面的上同调群****定理 6.5 (球面的 de Rham 上同调群)**

对任意 $n \geq 1$ 有

$$H_{dR}^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n, \\ 0, & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$



对于上面的定理, 只需用 M-V 序列给出如下结果即可:

命题 6.5

- 对任意 $n \geq 2$ 有 $H_{dR}^1(S^n) = \{0\}$.
- 对任意 $n, k \geq 2$ 有 $H_{dR}^k(S^n) \cong H_{dR}^{k-1}(S^{n-1})$.



证明 设 $U = S^n \setminus \{N\}, V = S^n \setminus \{S\}$, 则 $U, V \cong \mathbb{R}^n, U \cap V \simeq S^{n-1}$, 首先考虑正合列

$$0 \longrightarrow H_{dR}^0(S^n) \longrightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \longrightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \longrightarrow H_{dR}^1(S^n) \longrightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)$$

代入可得

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i^*} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{j^*} \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H_{dR}^1(S^n) \longrightarrow 0$$

因此 $H_{dR}^1(S^n) \cong \mathbb{R}/\text{Ker } d^* = \mathbb{R}/\text{Im } j^*$, 但 i^* 为单射说明

$$\dim \text{Im } j^* = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } j^* = 2 - \dim \text{Im } i^* = 1,$$

因此 $H_{dR}^1(S^n) \cong \{0\}$.

另外考虑正合列 ($k \geq 2$)

$$H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \longrightarrow H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{dR}^k(S^n) \longrightarrow H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V)$$

代入可得

$$0 \longrightarrow H_{dR}^{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{dR}^k(S^n) \longrightarrow 0$$

因此 $H_{dR}^{k-1}(S^{n-1}) \cong H_{dR}^k(S^n)$.

借助上面的结果, 可以给出欧氏空间维数不变性的一个证明.

定理 6.6 (维数不变性)

若 $m \neq n$, 则 $\mathbb{R}^n$ 不同胚于 $\mathbb{R}^m$.

证明 若不然则各挖去一个点可得 $S^{n-1} \cong S^{m-1}$, 但根据上面的计算, 它们的 de Rham 上同调群不同, 因此不同胚, 矛盾.

de Rham 上同调群的维数有限性

定义 6.6 (好覆盖)

设 M 为光滑流形, $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 为 M 的开覆盖, 若对 Λ 的任意有限子集 I , 交集 $U_I := \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ 或为空集, 或微分同胚于 $\mathbb{R}^n$, 则称 $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 为好覆盖.

注 借助 Riemann 度量可以证明, 任何光滑流形上都有一个好覆盖, 并且对于紧流形这个好覆盖可取为有限的. 并且对 M 的任意开覆盖, 它都有一个好覆盖作为加细.

定理 6.7 (de Rham 上同调群的维数有限性)

若 M 存在有限好覆盖, 则其 de Rham 上同调群都是有限维的.

证明 若 M 的有限好覆盖只有一个集合, 则命题显然成立, 假设对 $l-1$ 情形成立, 考虑 M 的有限好覆盖为 $\{U_1, \dots, U_l\}$ 的情形, 记 $U = U_1 \cup \dots \cup U_{l-1}, V = U_l$, 则 $M = U \cup V$, 根据归纳假设可知 $U, V, U \cap V$ 的 de Rham 上同调群都是有限维的. 考虑正合列

$$H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^k(M) \xrightarrow{i^*} H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V)$$

则 $H^k(M)/\text{Ker } i^* \cong \text{Im } i^*$, 而

$$\dim \text{Ker } i^* = \dim \text{Im } d^* = \dim H_{dR}^{k-1}(U \cap V) - \dim \text{Ker } d^*,$$

因此 $\dim H^k(M) < \infty$.

由于紧流形存在有限坐标卡覆盖为好覆盖, 因此有如下结果:

推论 6.4 (紧流形具有有限维 de Rham 上同调群)

若 M 为紧流形或同伦等价于紧流形, 则对任意 k 有 $\dim H_{dR}^k(M) < \infty$.

Kunneth 公式

定理 6.8 (Kunneth 公式)

设 M, N 存在有限好覆盖, 则对任意 $0 \leq k \leq \dim M + \dim N$ 有

$$H_{dR}^k(M \times N) \cong \bigoplus_{i+j=k} H_{dR}^i(M) \otimes H_{dR}^j(N).$$

证明 设 π_M, π_N 为投影映射, 考虑映射

$$\Phi: \Omega^*(M) \otimes \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M \times N), \quad \omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \pi_M^* \omega_1 \wedge \pi_N^* \omega_2,$$

则它诱导 de Rham 上同调群间的映射

$$\Phi^*: H_{dR}^*(M) \otimes H_{dR}^*(N) \rightarrow H_{dR}^*(M \times N), \quad [\omega_1] \otimes [\omega_2] \mapsto [\pi_M^* \omega_1 \wedge \pi_N^* \omega_2],$$

下证 Φ^* 是线性同构, 对 M 好覆盖的个数 l 归纳, 当 $l = 1$ 时 $M \cong \mathbb{R}^n, M \times N \simeq N$, 因此公式显然成立. 假设 Kunneth 公式对不超过 $l-1$ 个好开覆盖的流形 M 成立, 设 M 的好覆盖为 $\{U_1, \dots, U_l\}$, 记 $U = U_1 \cup \dots \cup U_{l-1}, V = U_l$, 再记

$$H^k(M, N) := \bigoplus_{i+j=k} H_{dR}^i(M) \otimes H_{dR}^j(N),$$

考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^k(M, N) & \xrightarrow{i^*} & H^k(U, N) \oplus H^k(V, N) & \xrightarrow{j^*} & H^k(U \cap V, N) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(M, N) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \Phi^* & & \downarrow \Phi^* & & \downarrow \Phi^* \\ \cdots & \longrightarrow & H_{dR}^k(M \times N) & \xrightarrow{i^*} & H_{dR}^k(U \times N) \oplus H_{dR}^k(V \times N) & \xrightarrow{j^*} & H_{dR}^k((U \cap V) \times N) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^{k+1}(M \times N) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

根据 M-V 序列可知两行为正合列, 根据归纳假设可知中间两个 Φ^* 为同构, 因此只需验证 Φ^* 与 i^*, j^*, d^* 的交换性, 就可由“五引理”得证 (验证不算困难, 略麻烦些).

借助 Kunneth 公式, 可以计算出

$$H_{dR}^k(S^n \times S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 2n, \\ \mathbb{R}^2, & k = n, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

此外可以归纳出 n 维环面 $\mathbb{T}^n$ 的 de Rham 上同调群为

$$H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}.$$

6.3 紧支集 de Rham 上同调

容易验证, M 上紧支光滑 k -形式的全体 $\Omega_c^k(M)$ 是一个线性空间 (也是 $\Omega^k(M)$ 的子空间, 同时是一个 $C^\infty(M)$ -模), 借助外微分同样可得一个上链复形

$$0 \longrightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow \Omega_c^m(M) \longrightarrow 0$$

同样可以考虑“紧支闭形式”与“紧支恰当形式”

$$Z_c^k(M) = \{\omega \in \Omega_c^k(M) : d\omega = 0\},$$

$$B_c^k(M) = \{\omega \in \Omega_c^k(M) : \exists \eta \in \Omega_c^{k-1}(M) \text{ s.t. } \omega = d\eta\}.$$

并由此定义出对应的上同调群.

定义 6.7 (紧支集 de Rham 上同调群)

设 M 为光滑流形, 称 $H_c^k(M) = Z_c^k(M)/B_c^k(M)$ 为 M 的 k 阶紧支集 de Rham 上同调群.

注

1. 若 M 为紧流形, 则 $\Omega_c^k(M) = \Omega^k(M)$, 因此 $H_c^k(M) = H_{dR}^k(M)$.
2. 根据定义有 $Z_c^k(M) = Z^k(M) \cap \Omega_c^k(M)$, 因此“紧支闭形式”就是“紧支的闭形式”, 但一般“紧支且恰当的形式”未必是“紧支恰当形式”, 只有 $B_c^k(M) \subseteq B^k(M) \cap \Omega_c^k(M)$. 例如考虑 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 g , 它在 $x \leq 0$ 时取 0, 在 $x \geq 1$ 时取 1, 记 $f = g'$ 则 $fdx = dg \in B^1(\mathbb{R}) \cap \Omega_c^1(\mathbb{R})$, 但 $\int_{\mathbb{R}} fdx = 1 \neq 0$, 因此 $fdx \notin B_c^1(\mathbb{R})$.
3. 对于 $k = 0$ 有

$$H_c^0(M) = Z_c^0(M) = \{f \in C^\infty(M) : df = 0, \text{supp } f \text{ 紧}\},$$

而 $df = 0$ 的函数在每个连通分支上取常值, f 紧说明它在非紧连通分支上均为 0, 因此若设 K_c 为 M 紧连通分支个数, 则 $H_c^0(M) \cong \mathbb{R}^{K_c}$.

4. 容易验证, 紧支 de Rham 上同调群之间可以定义与非紧情形相同的上积, 并且在上积运算下有分次环 $H_c^*(M)$. 特别地, 可以定义 de Rham 上同调群与紧支 de Rham 上同调群之间的上积, 并且其结果依然是紧支的.

与一般的 de Rham 上同调不同之处在于, H_c^k 不再是一个从光滑流形范畴到线性空间范畴的函子, 因为对光滑映射 $F: M \rightarrow N$ 有 $\text{supp } F^*\omega \subset F^{-1}(\text{supp } \omega)$, 因此光滑映射的拉回不一定保持紧支性, 因此同伦不变性、M-V 序列等结果不能直接得到.

作为补救, 可以令 $F: M \rightarrow N$ 为逆紧光滑映射, 则此时其拉回依然有紧支集, 并且

$$F^*: H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M)$$

是良定的线性映射, 对应关系 $F \mapsto F^*$ 满足函子性, 因此 H_c^k 可以视为逆紧光滑范畴 (态射为逆紧光滑映射) 到线性空间范畴的函子. 由于微分同胚都是逆紧的, 因此立得: 微分同胚的光滑流形具有相同的紧支上同调群. 进一步可以证明:

定理 6.9 (紧支 de Rham 上同调: 逆紧同伦不变性)

若逆紧光滑映射 $\phi_0, \phi_1: M \rightarrow N$ 逆紧同伦, 则它们有相同的诱导映射 $\phi_0^* = \phi_1^*: H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$.

注 逆紧同伦是指存在逆紧映射 $\Phi: M \times I \rightarrow N$ 为连接 ϕ_0, ϕ_1 的同伦.

对于逆紧映射, 可以在 Whitney 逼近定理的基础上证明:

定理 6.10 (逆紧映射的 Whitney 逼近定理)

光滑流形之间的逆紧连续映射一定同伦于某个逆紧光滑映射.

进一步, 由于同胚都是逆紧连续映射, 因此紧支 de Rham 上同调群仍然是拓扑不变量.

推论 6.5 (紧支 de Rham 上同调的拓扑不变性)

若 M, N 同胚, 则 $H_c^*(M) \cong H_c^*(N)$.

不过紧支 de Rham 上同调群不再是同伦不变量, 这由后面欧氏空间的紧支 de Rham 上同调群就能看出.

¶ 欧氏空间的紧支 de Rham 上同调群

下面证明如下结果:

定理 6.11 (紧支 de Rham 上同调群的 Poincare 引理)

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

【STEP 0. 计算 $H_c^0(\mathbb{R}^m)$ 】

由于 $\mathbb{R}^m$ 都是非紧连通的, 因此可以直接得到 $H_c^0(\mathbb{R}^m) = \{0\}$.

【STEP 1. 计算 $H_c^1(\mathbb{R}^m), m > 1$ 】

 **笔记** 基本思路是将 $\mathbb{R}^m$ 由球极投影等同 (微分同胚) 到 $S^m \setminus N$, 则 $\mathbb{R}^m$ 上的紧支微分形式对应到 S^m 上支在 N 之外的微分形式, 从而借助 S^m 的 de Rham 上同调群计算.

设 $\phi: S^m \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为微分同胚, $\iota: S^m \setminus N \hookrightarrow S^m$ 为嵌入, 令 $\iota_*: \Omega_c^k(S^m \setminus N) \rightarrow \Omega^k(S^m)$ 为紧支集光滑形式的零扩张, 对任意 $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^m)$, 令 $\tilde{\omega} = \iota_* \phi^* \omega$, 则每个 “ $\mathbb{R}^m$ 上的紧支微分形式” 都唯一对应了一个 “ S^m 上支在北极点 N 之外的微分形式”, 反之亦然. 注意到 d 也与 ι_* 可交换, 因此若 $\omega = d\eta$ 则

$$\tilde{\omega} = \iota_* \phi^* \omega = \iota_* \phi^* d\eta = d\iota_* \phi^* \eta = d\tilde{\eta},$$

特别地, ω 为闭形式当且仅当 $\tilde{\omega}$ 为闭形式.

对任意 $\omega \in Z_c^1(\mathbb{R}^m)$, 取 N 的连通开邻域 U 使得对应的 $\tilde{\omega} \in Z^1(S^m)$ 支在 U 外, $H_{dR}^1(S^m) = 0$ 说明 $\tilde{\omega}$ 恰当, 即存在 $\tilde{f} \in C^\infty(S^m)$ 使得 $\tilde{\omega} = d\tilde{f}$, 由于在 U 中 $d\tilde{f} = \tilde{\omega} = 0$, 因此 $\tilde{f}$ 在 U 上取常值 c , 不妨设 $c = 0$ (否则考虑 $\tilde{f}_1 = \tilde{f} - c$), 则 $f = (\phi^{-1})^*(\iota_*)^{-1}\tilde{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ 并且 $\omega = df \in B_c^1(\mathbb{R}^m)$, 因此当 $m > 1$ 时 $H_c^1(\mathbb{R}^m) = 0$.

【STEP 2. 计算 $H_c^k(\mathbb{R}^m), 1 < k < m$ 】

对任意 $\omega \in Z_c^k(\mathbb{R}^m)$ 以及对应的 $\tilde{\omega} \in Z^k(S^m)$, 可取 N 的可缩邻域 U 使得 $\tilde{\omega}$ 支在 U 外, 由于 $H_{dR}^k(S^m) = 0$, 因此存在 $\tilde{\eta} \in \Omega^{k-1}(S^m)$ 使得 $\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$.

由于 U 可缩, 因此 $H_{dR}^{k-1}(U) = \{0\}$, 说明在 U 中 $d\tilde{\eta} = \tilde{\omega} = 0$, 因此 $\tilde{\eta}$ 在 U 中恰当, 或者说存在 $\tilde{\mu} \in \Omega^{k-2}(U)$ 使得 $\tilde{\eta} = d\tilde{\mu}$. 取 S^m 上 N 附近的鼓包函数 ρ 使之支在 U 中, 令 $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta} - d(\rho\tilde{\mu}) \in \Omega^{k-1}(S^m)$ 则 $\tilde{\eta}$ 在 N 附近恒为 0, 并且 $d\tilde{\eta}_1 = d\tilde{\eta} = \tilde{\omega}$, 令 $\eta_1 = (\phi^{-1})^*(\iota_*)^{-1}\tilde{\eta}_1 \in \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^m)$, 则 $\omega = d\eta_1 \in B_c^k(\mathbb{R}^m)$, 因此当 $1 < k < m$ 时有 $H_c^k(\mathbb{R}^m) = 0$.

【STEP 3.1. 计算 $H_c^1(\mathbb{R})$ 】

考虑积分映射 (它是良定的线性满射)

$$\int_{\mathbb{R}} : H_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}} \omega,$$

容易验证它是线性满射, 若对某个 $f \in C_c^\infty(M)$ 有 $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0$, 则 $g(t) = \int_{-\infty}^t f(s)ds \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 且满足 $f dt = dg$, 即 $f dt \in B_c^1(\mathbb{R})$, $[f dt] = 0$, 说明 $\int_{\mathbb{R}}$ 是单射, 因此 $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

【STEP 3.2. 计算 $H_c^m(\mathbb{R}^m), m > 1$ 】

同样考虑积分映射 (它是良定的线性满射)

$$\int_{\mathbb{R}^m} : H_c^m(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \omega,$$

设 $\omega \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^m) = Z_c^m(\mathbb{R}^m)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^m} \omega = 0$, 将 $\mathbb{R}^m$ 视为 $S^m \setminus N$, 并将 ω 对应为 S^m 上支在 N 外的 m 形式 $\tilde{\omega}$, 则

$$\int_{S^m} \tilde{\omega} = \int_{S^m} \iota_* \phi^* \omega = \int_{S^m \setminus N} \phi^* \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \omega = 0,$$

而 S^m 是紧流形, 同样有良定的积分映射 $\int_{S^m} : H_{dR}^m(S^m) \rightarrow \mathbb{R}$, 由于 $H_{dR}^m(S^m) \cong \mathbb{R}$, 因此 $\text{Ker } \int_{S^m} = 0$, 由 $\int_{S^m} \tilde{\omega} = 0$ 可知 $[\tilde{\omega}] = 0$, 即存在 $\tilde{\eta} \in \Omega^{m-1}(S^m)$ 使得 $\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$.

重复前面的论证: 取 N 的可缩开邻域 U 使得 $\tilde{\omega}|_U = 0$, 再将 $\tilde{\eta}$ 调整为 $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta} - d(\rho\tilde{\mu})$, $\tilde{\mu} \in \Omega^{m-2}(U)$ 使得在 U 上 $d\tilde{\mu} = \tilde{\eta}$, 再令 $\eta_1 = (\phi^{-1})^*(\iota_*)^{-1}\tilde{\eta}_1 \in \Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}^m)$, 则 $\omega = d\eta_1 \in B_c^m(\mathbb{R}^m)$, $[\omega] = 0$, 说明 $\int_{\mathbb{R}^m}$ 是同构.

¶ 紧支 de Rham 上同调群的 Mayer-Vietoris 序列

对于紧支情形, 不能直接用包含映射的拉回给出紧支形式之间的映射, 因为包含映射一般不是逆紧的, 但从上面计算 $H_c^k(\mathbb{R}^m)$ 的过程可以看出, 对于 M 的开子集 U , 包含映射 $\iota: U \hookrightarrow M$ 可以诱导 “推出” 映射 $\iota_*: \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(M)$, 它通过零延拓将 U 上的紧支形式对应到 M 的紧支形式, 并且 ι_* 与 d 可交换, 它也诱导

线性映射

$$\iota_* : H_c^k(U) \rightarrow H_c^k(M).$$

因此设 $\{U, V\}$ 为 M 的开覆盖, 借助推出可以定义

$$j_c : H_c^k(U \cap V) \rightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V), \quad [\omega] \mapsto ((j_1)_*[\omega], (j_2)_*[\omega])$$

以及

$$i_c : H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \rightarrow H_c^k(M), \quad ([\omega_1], [\omega_2]) \mapsto (\iota_1)_*[\omega_1] + (\iota_2)_*[\omega_2],$$

并且有正合列

$$0 \longrightarrow H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{j_c} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{i_c} H_c^k(M) \longrightarrow 0$$

进一步可以定义连接同态 $d_c^* : H_c^k(M) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cap V)$, 首先取单位分解 $\{\rho_U, \rho_V\}$, 则对任意 $\omega \in Z_c^k(M)$ 有 $\rho_U \omega \in Z_c^k(U), \rho_V \omega \in Z_c^k(V)$, 并且由于 $d(\rho_U \omega) = -d(\rho_V \omega)$, 因此 $d(\rho_U \omega) \in Z_c^{k+1}(U \cap V)$, 可定义

$$d_c^*[\omega] = [d(\rho_U \omega)].$$

此时由 Zig-Zag 定理, 可以给出紧支 de Rham 上同调的 M-V 序列.

定理 6.12 (Mayer-Vietoris 序列: 紧支版本)

设 $\{U, V\}$ 为 M 的开覆盖, 则有长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_c^{k+1}(U \cap V) & \xrightarrow{j_c^*} & H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) & \xrightarrow{i_c^*} & \cdots \\ & \searrow & & \searrow & & \\ & & & d^* & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ \rightarrow & H_c^k(U \cap V) & \xrightarrow{j_c^*} & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) & \xrightarrow{i_c^*} & H_c^k(M) & \rightarrow \\ & \searrow & & \searrow & & \\ & & & d^* & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{j_c^*} & H_c^{k-1}(U) \oplus H_c^{k-1}(V) & \xrightarrow{i_c^*} & H_c^{k-1}(M) & \rightarrow \end{array}$$

其中 i_c^*, j_c^* 定义如上.

注 由于此时通过“推出”而非“拉回”, 因此紧支版本的 M-V 序列局部与 M-V 序列方向相反.

同样地, 借助紧支 M-V 序列可以证明:

定理 6.13 (有限维紧支 de Rham 上同调群的刻画)

若 M 有好覆盖, 则对任意 k 都有 $\dim H_c^k(M) < \infty$.

定理 6.14 (Kunneth 公式: 紧支版本)

若 M, N 都有有限好覆盖, 则 $H_c^*(M \times N) = H_c^*(M) \otimes H_c^*(N)$, 即对任意 $0 \leq k \leq \dim M + \dim N$ 有

$$H_c^k(M \times N) \cong \bigoplus_{i+j=k} H_c^i(M) \otimes H_c^j(N).$$

积分映射

对于 m 维可定向流形 M 以及最高形式 $\omega \in \Omega_c^m(M)$, 则 ω 闭并且可定义积分映射

$$\int_M : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_M \omega,$$

注意到若 $\omega \in B_c^m(M)$, 则根据 Stokes 公式可得 $\int_M \omega = 0$, 因此积分映射实际上诱导了线性映射

$$\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

命题 6.6 (积分映射是满的)

设 M 为 m 维连通可定向光滑流形, 则积分映射 $\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 是满射.



证明 考虑 M 上的体积形式 ω , 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 容易构造出某个紧支在坐标开集中的函数 f 使得 $\int_M f\omega = c$. 进一步, 若 $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$, 则其上的最高次紧支恰当形式有一个很好的刻画.

推论 6.6

设 M 为 m 维连通可定向光滑流形且 $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$, 则对于 $\omega \in \Omega_c^m(M)$, $\omega \in B_c^m(M)$ 当且仅当 $\int_M \omega = 0$.



证明 此时积分映射是线性同构, 因此 $\int_M \omega = 0$ 当且仅当 $[\omega] = 0$, 即 $\omega \in H_c^m(M)$.

6.3.1 最高阶 de Rham 上同调群**¶ 可定向流形的最高阶紧支 de Rham 上同调群**

我们已知 $H_c^m(S^m) = H_c^m(\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}$, 事实上这对一般的连通定向流形都成立.

定理 6.15 (连通定向流形的最高阶紧支 de Rham 上同调群)

设 M 为 m 维连通定向光滑流形, 则积分映射 $\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 为线性同构, 因此 $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$.



证明

由于紧流形的 de Rham 上同调群就是紧支上同调群, 因此

推论 6.7

若 M 是 m 维连通定向紧光滑流形, 则 $H_{dR}^m(M) \cong H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$.

**¶ 可定向流形的最高阶 de Rham 上同调群**

为了计算非紧可定向流形的最高阶 de Rham 上同调群, 需要如下引理:

引理 6.4 (非紧光滑流形的某种开覆盖)

设 M 为非紧连通光滑流形, 则存在 M 的局部有限可数覆盖 $\{V_k\}$ 满足

- 每个 V_k 都是连通预紧开集 (即其闭包为紧集).
- 对任意 k , 存在 $j > k$ 使得 $V_k \cap V_j \neq \emptyset$.



证明 借助穷竭函数构造即可.

定理 6.16 (非紧连通定向流形的最高阶 de Rham 上同调群)

设 M 是 m 维非紧连通可定向光滑流形, 则 $H_{dR}^m(M) = 0$.

**¶ 不可定向流形的情形****定理 6.17 (不可定向流形的最高阶 de Rham 上同调群)**

设 M 是 m 维连通不可定向光滑流形, 则 $H_{dR}^m(M) = H_c^m(M) = 0$.



6.3.2 映射度

对于 m 维连通定向流形 M, N , 积分映射给出了同构 $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}, H_c^m(N) \cong \mathbb{R}$, 若 $f: M \rightarrow N$ 为逆紧光滑映射, 则拉回诱导线性同构 $f^*: \mathbb{R} \cong H_c^m(N) \rightarrow H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$, 由于两边都是一维, 因此存在常数 $\deg f$ 使得

$$\int_M f^* \omega = (\deg f) \int_N \omega,$$

由此可给出映射度的定义.

定义 6.8 (映射度)

设 M, N 为 m 维连通定向流形, $f: M \rightarrow N$ 为逆紧光滑映射, 称上述常数 $\deg f$ 为 f 的映射度.

注

1. 由于映射度通过积分定义, 因此它与定向有关 (选择不同定向可能得到相反数), 因此定义 $\deg f$ 时要先确定定向; 不过当 f 为 M 到自身的映射时, $\deg f$ 与定向的选取无关.
2. 对于微分同胚 $f: M \rightarrow N$, 根据换元公式可得

$$\deg f = \begin{cases} 1, & f \text{ 保定向,} \\ -1, & f \text{ 反定向.} \end{cases}$$

命题 6.7 (映射度的基本性质)

设 M, N, P 为同维连通定向流形, 则

1. 若 $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow P$ 都是逆紧光滑映射, 则 $g \circ f$ 也逆紧光滑, 并且

$$\deg g \circ f = (\deg g)(\deg f).$$

2. 若 $f: M \rightarrow N, g: M \rightarrow N$ 逆紧同伦, 则 $\deg f = \deg g$.

注 由于每个逆紧连续映射都逆紧同伦于一个逆紧光滑映射, 因此可以定义逆紧连续映射的映射度.

由于紧流形之间的连续映射都逆紧, 因此对于紧流形 M 以及 S^m , 若光滑映射 $f, g: M \rightarrow S^m$ 同伦, 则 $\deg f = \deg g$, 事实上反之也可以用映射度判定同伦.

定理 6.18 (Hopf 映射度定理)

设 M 为 m 维连通定向流形, 则连续映射 $f, g: M \rightarrow S^m$ 同伦当且仅当 $\deg f = \deg g$.

借助局部信息, 可以计算出逆紧映射的映射度. 首先考虑非满射情形:

命题 6.8 (不满 $\Rightarrow$ 映射度为 0)

设 M, N 是 m 维连通定向光滑流形, 若逆紧映射 $f: M \rightarrow N$ 不是满射, 则 $\deg f = 0$.

证明 由于逆紧映射是闭映射, 因此若 f 不满则存在 $q \notin f(M)$ 以及邻域 $\tilde{U} \cap f(M) = \emptyset$. 取支在 $\tilde{U}$ 中的 m 次形式 ω 使得 $\int_N \omega = 1$, 则 $f^* \omega = 0$, 因此 $\deg f = 0$.

若逆紧映射 $f: M \rightarrow N$ 是满射, 取 $q \in N$ 为 f 的一个正则值, 则 $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$, 并且存在 q 的邻域 $\tilde{U}$ 以及 p_i 的邻域 U_i 使得 U_i 两两无交, $f|_{U_i}: U_i \rightarrow \tilde{U}$ 为微分同胚以及 $f^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{i=1}^k U_i$. 取 $\tilde{U}, U_i$ 充分小, 可使之都是连通定向坐标卡, 令

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & f|_{U_i} \text{ 保定向,} \\ -1, & f|_{U_i} \text{ 反定向.} \end{cases}$$

取 $\omega \in \Omega_c^m(\tilde{U})$ 使得 $\int_N \omega = 1$, 则 $f^* \omega$ 支在 $f^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{i=1}^k U_i$ 中, 并且

$$\int_N f^* \omega = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^* \omega = \sum_{i=1}^k \sigma_i \int_{\tilde{U}} \omega = \sum_{i=1}^k \sigma_i.$$

即得

定理 6.19 (映射度的局部计算)

映射度一定是整数, 并且 $\deg f = \sum_{i=1}^n \sigma_i$.



毛球定理

定理 6.20 (毛球定理)

偶数维球面上不存在处处非零的光滑向量场.



证明 假设 $S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ 中存在处处非零的光滑向量场 X , 可不妨设对任意 $p \in S^{2n}$ 都有 $|X_p| = 1$. 将 p, X_p 均视为 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的向量, 考虑映射

$$F: S^{2n} \times I \rightarrow S^{2n}, \quad (p, t) \mapsto p \cos \pi t + X_p \sin \pi t,$$

则 $p \perp X_p, |p| = |X_p| = 1$ 说明 F 是恒同映射 $\text{Id}_{S^{2n}}$ 与对径映射 f 之间的同伦, 而偶数维球面上的对径映射是反定向的, 但是 $-1 = \deg f \neq \deg \text{Id}_{S^{2n}} = 1$, 矛盾.

Brouwer 不动点定理

引理 6.5 (边界映射向内部扩张的条件)

设 M 是 m 维连通紧定向光滑流形, 边界 ∂M 也连通, X 是 $m-1$ 维连通定向无边流形, 若光滑映射 $f: \partial M \rightarrow X$ 可以扩张为光滑映射 $g: M \rightarrow X$, 则 $\deg f = 0$.



证明 设 $\iota: \partial M \rightarrow M$ 为嵌入映射, 则 $f = g \circ \iota$, 取 $\omega \in \Omega^{m-1}(X)$ 使得 $\int_X \omega = 1$ 则

$$\deg f = (\deg f) \int_X \omega = \int_{\partial M} f^* \omega = \int_{\partial M} \iota^* g^* \omega = \int_M d(g^* \omega) = \int_M g^* d\omega = 0.$$

定理 6.21 (Brouwer 不动点定理)

$\mathbb{R}^m$ 中从闭单位球 $\bar{B}$ 到自身的连续映射都有不动点.



Borsuk-Ulam 定理

定理 6.22 (Borsuk-Ulam 定理)

对任意连续映射 $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, 存在 p_0 使得 $f(p_0) = f(-p_0)$.



6.3.3 Poincare 对偶

设 M 为 m 维定向光滑流形, 则借助上积和积分可以构造出双线性映射

$$P_M^k: H_{dR}^k(M) \times H_c^{m-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta,$$

并且该双线性映射诱导 **Poincare 对偶映射**

$$\mathcal{P}_M^k: H_{dR}^k(M) \rightarrow (H_c^{m-k}(M))^*, \quad [\omega] \mapsto \{\eta \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\},$$

事实上, 可以证明这是一个线性同构.

定理 6.23 (Poincare 对偶)

对任意 m 维定向流形 M , Poincare 对偶

$$\mathcal{P}_M^k : H_{dR}^k(M) \rightarrow (H_c^{m-k}(M))^*, \quad [\omega] \mapsto \{\eta \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\},$$

是一个线性同构.

注 若 $\dim H_c^{m-k} < \infty$, 则 $H_{dR}^k(M) \cong (H_c^{m-k}(M))^* \cong H_c^{m-k}(M)$; 特别地, $\mathcal{P}_M^k([1]) = \int_M$.
借助 Poincare 对偶, 可以给出许多重要结果:

推论 6.8 (紧支 de Rham 上同调群的 Kunneth 公式)

设 M, N 都是定向流形, 则

$$H_c^k(M \times N) \cong \bigoplus_{i+j=k}^k H_c^i(M) \otimes H_c^j(N).$$

借此可得推论:

推论 6.9

对任意定向流形 M , 若其紧支上同调群都是有限维的, 则

$$H_c^{k+l}(M \times \mathbb{R}^l) \cong H_c^k(M).$$

¶ Betti 数与 Euler 示性数

在前文中, 光滑流形的 Betti 数与 Euler 示性数定义为

$$b_k = \dim H_{dR}^k(M), \quad \chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k,$$

对于紧流形 (其上 de Rham 上同调群与紧支情形相同) 有:

引理 6.6

设 M 为 m 维紧定向流形, 则

- 对任意 k 有 $b_k = b_{m-k}$.
- 若 $m = 4n + 2$ 则 b_{2n+1} 为偶数.

定理 6.24 (紧定向流形的 Euler 示性数)

设 M 是紧定向流形, 则

1. 若 $\dim M = 2n + 1$, 则 $\chi(M) = 0$.
2. 若 $\dim M = 4n + 2$, 则 $\chi(M)$ 为偶数.

6.4 Thom 类**¶ 向量丛间的运算****定理 6.25 (向量丛的同伦不变性)**

设 Y 为紧流形, 光滑映射 $f_0, f_1 : Y \rightarrow X$ 同伦, E 为 X 上的向量丛, 则有向量丛同构 $f_0^{-1}E \cong f_1^{-1}E$, 也就是说同伦诱导丛同构.

证明 设 $f: Y \times I \rightarrow X$ 为连接 f_0, f_1 的同伦, 下面证明: 若对某个 $t_0 \in I$, $f_{t_0}^{-1}E$ 与某个 Y 上的向量丛 F 同构, 则在 t_0 的某个邻域内对任意 t 都有 $f_t^{-1}E \cong F$, 进而借助 I 的紧性可得 $f_0^{-1}E \cong f_1^{-1}E$ (或者说对任意 t , $f_t^{-1}E$ 均相互同构).

注 上述证明中, Y 的紧性只用于寻找一个包含在大覆盖中的“管型”邻域, 而这仿紧性也可以做到, 因此上述定理对仿紧空间依然成立, 但大多空间 (例如流形、度量空间等) 都是仿紧的, 因此其泛用性很高.

推论 6.10

可缩流形上的向量丛都是平凡的.

证明 设 M 为可缩流形, E 为其上的向量丛, $f: M \rightarrow pt, g: pt \rightarrow M$ 使得 $g \circ f \simeq \text{Id}_M$, 则由同伦不变性可得

$$E \cong (g \circ f)^{-1}E = f^{-1}g^{-1}E,$$

其中 $g^{-1}E$ (是一点上的向量丛) 为平凡的, 则 $f^{-1}g^{-1}E$ 自然也是平凡的.

¶ 向量丛的紧上同调

根据 de Rham 上同调/紧支上同调的 Poincare 对偶可得

$$H_{dR}^*(M \times \mathbb{R}^n) = H_{dR}^*(M), \quad H_c^*(M \times \mathbb{R}^n) = H_c^{*-n}(M),$$

如果将 $M \times \mathbb{R}^n$ 视为 M 上的平凡丛, 则对一般的向量丛 E , 零截面 $s: x \mapsto (x, 0)$ 将 M 嵌入到 E , 而这时 $M \times \{0\}$ 为 E 的形变收缩核, 因此根据 de Rham 上同调群的同伦不变性可得

$$H_{dR}^*(E) \cong H_{dR}^*(M),$$

但是紧支情形则不然 (Möbius 带可以视为 S^1 的 1 维向量丛, 但它的紧支上同调群是平凡的), 不过若 E, M 都是有有限好覆盖的定向流形, 则根据 Poincare 对偶易得 (设 E 是 $m+n$ 维流形)

$$H_c^*(E) \cong (H_{dR}^{m+n-*}(E))^* \cong (H_{dR}^{m+n-*}(M))^* \cong H_c^{*-n}(M).$$

引理 6.7 (定向流形上的定向丛)

若 E 为定向流形 M 上的定向向量丛, 则它是一个定向流形.

注 注意, 这里的条件仅要求 E 是定向向量丛, 而不要求其光滑性.

命题 6.9

若 $\pi: E \rightarrow M$ 为定向向量丛, M 是有有限好覆盖的定向流形, 则 $H_c^*(E) \cong H_c^{*-n}(M)$.

注 后面会看到, 这里对 M 可定向的要求是多余的.

¶ 紧垂上同调与纤维积分

定义 6.9 (紧垂上同调)

1. 设向量丛 $\pi: E \rightarrow M$, 称 $\Omega_{cv}^*(E)$ 中的元素为紧垂形式, 其中 $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$ 当且仅当对任意紧集 $K \subset M$, $\pi^{-1}(K) \cap \text{supp } \omega$ 为紧集.
2. 借助紧垂复形 $\Omega_{cv}^*(E)$, 可以定义出紧垂上同调 $H_{cv}^*(E)$.

注 $\Omega_{cv}^*(E)$ 中的元素 ω 未必在 E 上紧支, 但 $\text{supp } \omega|_{\pi^{-1}(x)} \subset \pi^{-1}(x) \cap \text{supp } \omega$ 紧, 因此 ω 在每个纤维上的限制都是紧支的.

若 E 还是可定向流形, 则可以仿照证明 de Rham 上同调群同伦不变性的过程, 定义出纤维积分 $\pi_*: \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-n}(M)$.

【STEP 1. $E = M \times \mathbb{R}^n$ 情形】

我们断言: $\Omega_{cv}^*(E)$ 中的微分形式可以分解为 $f dt^I \wedge \pi^* \phi$ 的局部有限和, 其中 $f \in C^\infty(E)$ 在每个纤维上紧支, $\phi \in \Omega^*(M)$, I 为指标 (要求 I 保持升序)。

进而定义映射

$$\pi_* : f dt^I \wedge \pi^* \phi \mapsto \begin{cases} 0, & |I| < n, \\ \phi \int_{\mathbb{R}^n} f dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^n, & |I| = n, \end{cases}$$

【STEP 2. 一般情形】

对于一般的定向向量丛 E , 设 $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ 为定向平凡化映射, 对任意 $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$, 只需讨论它局部为第二类的情形。

考虑 $\omega_\alpha := \omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$, 它支在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 中, 设 $\omega = f dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^n \wedge \pi^* \phi$, 则可直接定义

$$\pi_*(\omega_\alpha) = \phi \int_{\mathbb{R}^n} f dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^n,$$

并且容易验证它是良定的, 即在公共区域有 $\pi_* \omega_\alpha = \pi_* \omega_\beta$, 因此 $\{\pi_* \omega_\alpha\}$ 给出了 M 上的形式 $\pi_* \omega$ 。

命题 6.10 (纤维积分与外微分的交换性)

纤维积分 π_* 与外微分 d 可交换。

命题 6.11 (投影公式)

- 设 $\pi: E \rightarrow M$ 为 n 维向量丛, $\tau \in \Omega^*(M)$, $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$, 则 $\pi_*(\pi^* \tau \wedge \omega) = \tau \wedge \pi_* \omega$ 。
- 若 M 还是 m 维定向流形, $\omega \in \Omega_{cv}^q(E)$, $\tau \in \Omega_c^{m+n-q}(M)$, 则借助 E 上的局部积定向可得

$$\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \pi_* \omega.$$

证明

1. 在局部考虑, 不妨设 $E = M \times \mathbb{R}^n$, $\omega = \pi^* \phi \wedge f dt^I$, 若 $|I| < n$ 则

$$\pi_*(\pi^* \tau \wedge \omega) = \pi_*(\pi^*(\tau \wedge \phi) \wedge f dt^I) = 0 = \tau \wedge \pi_* \omega.$$

若 $|I| = n$ 则

$$\pi_*(\pi^* \tau \wedge \omega) = \pi_*(\pi^*(\tau \wedge \phi) \wedge f dt^I) = (\tau \wedge \phi) \int_{\mathbb{R}^n} f dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^n = \tau \wedge \pi_* \omega.$$

2. 设 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 为 E 的定向平凡化, $\{\rho_\alpha\}$ 为从属的单位分解, 则 $\omega = \sum (\pi^* \rho_\alpha) \omega$, 其中 $(\pi^* \rho_\alpha) \omega$ 支在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 中, 则

$$\int_E \pi^* \tau \wedge \omega = \sum_\alpha \int_{\pi^{-1}(U_\alpha)} (\pi^* \tau) \wedge (\pi^* \rho_\alpha) \omega, \int_M \tau \wedge \pi_* \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \tau \wedge \pi_*(\pi^* \rho_\alpha) \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \tau \wedge \rho_\alpha \pi_* \omega,$$

其余过程同 1。

定理 6.26 (纤维积分给出 Thom 同构)

设 n 维定向向量丛 $\pi: E \rightarrow M$, M 有有限好覆盖, 则 $H_{cv}^*(E) \cong H_{dR}^{*-n}(M)$ 。

注 事实上, 这一命题对一般的定向流形 M 也成立。

证明 设 U, V 为 M 的开集, 根据单位分解易得正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cup V}) \longrightarrow \Omega_{cv}^*(E|_U) \oplus \Omega_{cv}^*(E|_V) \longrightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \longrightarrow 0$$

因此有 M-V 序列构成的图

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_{U \cup V}) & \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_U) \oplus H_{cv}^*(E|_V) & \longrightarrow & H_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \xrightarrow{d^*} H_{cv}^{*+1}(E|_{U \cup V}) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ \cdots & \longrightarrow & H_{dR}^{*-n}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{dR}^{*-n}(U) \oplus H_{dR}^{*-n}(V) & \longrightarrow & H_{dR}^{*-n}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H_{dR}^{*-n+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

上图中前两圈的交换性是平凡的，第三圈直接验证：

$$\pi_* d^* \omega = \pi_*(\pi^* d\rho_U \wedge \omega) = d\rho_U \wedge \pi_* \omega = d^* \pi_* \omega.$$

一方面，当 $U \cong \mathbb{R}^n$ 时命题是显然的，借助五引理可知当命题对 $U, V, U \cap V$ 成立时对 $U \cup V$ 也成立，因此对好覆盖的个数归纳即得。

注 仿照这一过程，考虑 E, M 的紧支 M-V 序列可得 $H_c^*(E) \cong H_c^{*-n}(M)$ ，由此可说明命题 6.9 中对 M 可定向的要求是多余的。

推论 6.11 (紧垂上同调的 Poincare 对偶)

纤维积分给出了同构 $\pi_* : H_{cv}^*(M \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{*-n}(M)$.

定义 6.10 (Thom 类)

称 $\mathcal{T} : H_{dR}^*(M) \xrightarrow{\sim} H_{cv}^{*+n}(E)$ 为 Thom 同构， $[1] \in H_{dR}^0(M)$ 对应的类 $\Phi(E) := \mathcal{T}([1]) \in H_{cv}^n(E)$ 称为定向向量丛 E 的 Thom 类。

注 由于 $\pi_*(\Phi) = 1$ ，由投影公式可得

$$\pi_*(\pi^* \omega \wedge \Phi) = \omega \wedge \pi_* \Phi = \omega,$$

因此 Thom 同构（实际上就是 π_* 的逆）可记为 $\mathcal{T}([\omega]) = \pi^*(\omega) \wedge \Phi$.

命题 6.12 (Thom 类的等价刻画)

设 $\pi : E \rightarrow M$ 为 n 维向量丛，则 $\Phi' \in H_{cv}^n(E)$ 为 Thom 类当且仅当它限制在每个纤维 E_x 上恰好为 $H_c^n(E_x)$ 的生成元。

证明 设 Φ 为 Thom 类， $x \in M$ ，则 $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^n = \pi_* \Phi(x) = 1$ 说明 $\Phi|_{E_x}$ 在 E_x 上积分为 1，即为其生成元（注意到每个纤维都微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ ，而 $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ ）。

反之设 Φ' 在每个纤维 E_x 上的限制都是生成元，即 $\pi_* \Phi' = 1$ ，则 $\pi_*(\pi^* \omega \wedge \Phi') = \omega \wedge \pi_* \Phi' = \omega$ ，因此 $\omega \mapsto \pi^* \omega \wedge \Phi'$ 必然为 Thom 同构 $\mathcal{T}$ ，故 $\Phi' = \Phi(E)$ 为 Thom 类。

命题 6.13 (向量丛直和的 Thom 类)

设 E_1, E_2 为两个定向向量丛， $\pi_i : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_i$ 为投影，则 $\Phi(E \oplus F) = \pi_1^* \Phi(E) \wedge \pi_2^* \Phi(F)$.

证明 注意到 $\pi_1^* \Phi(E) \wedge \pi_2^* \Phi(F) \in H_{cv}^{m+n}(E \oplus F)$ 在每个纤维上的限制都是生成元，由前述命题即得。

¶ Poincare 对偶与 Thom 类

承认这一事实：光滑流形 M 的任一子流形 S 都有“管型邻域”与 S 的法丛同构，其法丛在每一点处由 $N_p(S, M) := T_p M / T_p S$ 定义。

定义 6.11 (直和定向)

设 A, B 为定向向量丛，定向平凡化分别为 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}, \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ ，定义 $A \oplus B$ 上由 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha \oplus \psi_\alpha)\}$ 给出的定向为直和定向。

设 S 为 M 的子流形， $j : T \hookrightarrow M$ 为 S 的管型邻域 T 的嵌入，则有映射

$$H_{dR}^*(S) \xrightarrow{\wedge \Phi} H_{cv}^{*+(n-k)}(T) \xrightarrow{j_*} H_{dR}^{*+(n-k)}(M)$$

这里 j_* 有定义是因为只需考虑在 T 边界附近为 0 的那些上同调类。断言： S 在 M 中的 Poincare 对偶就是 S 法丛 T 的 Thom 类，即

$$\eta_S = j_*(\Phi \wedge 1) = j_* \Phi \in H_{dR}^{n-k}(M),$$

为证明这一点, 只需验证对任一 $\omega \in Z_c^k(M)$ 有 $\int_M \omega \wedge j_* \Phi = \int_S i^* \omega$, $i: S \rightarrow T$ 为嵌入 (到零截面), $\pi: T \rightarrow S$ 为法丛的“投影”, 而 π 实际上是 T 到 S 的形变收缩, π^*, i^* 作为上同调群之间的同态互逆, 因此 ω 与 $\pi^* i^* \omega$ 仅相差一个恰当形式, 可设 $\omega = \pi^* i^* \omega + d\tau$. 计算得 (其中 $\int_T (d\tau) \wedge \Phi = \int_T d(\tau \wedge \Phi) = 0$)

$$\int_M \omega \wedge j_* \Phi = \int_T \omega \wedge \Phi = \int_T (\pi^* i^* \omega + d\tau) \wedge \Phi = \int_T (\pi^* i^* \omega) \wedge \Phi = \int_S i^* \omega \wedge \pi_* \Phi = \int_S i^* \omega.$$

命题 6.14

- 闭定向子流形 S 在定向流形 M 中的 Poincaré 对偶与 S 法丛的 Thom 类可以由相同的微分形式表示.
- 定向向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ (M 可定向) 的 Thom 类与 E 零截面的 Poincaré 对偶可以由相同的微分形式表示.

命题 6.15 (局部化性质)

子流形 S 的 Poincaré 对偶的支集可以收缩到 S 的任意给定的管型邻域中.

横截性

设 $f: M \rightarrow N$ 光滑, 正则水平集定理表明对 f 的任意正则值 $q \in N$, $f^{-1}(q)$ 为 M 的子流形, 而对于任意子流形 $X \subset N$, 只有当 f 比较好时 $f^{-1}(X)$ 才是 M 的子流形, 下面来讨论这一点.

首先对任意 $q \in X$ (设 $\text{codim } X = l$), 存在 N 的坐标邻域 $(V, \phi) = (V, x^1, \dots, x^n)$ 使得 $V \cap X = \{x^{n-l+1} = \dots = x^n = 0\}$ 为 $q \in X$ 的坐标邻域, 考虑映射

$$g: V \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad t \mapsto (x^{n-l+1}(t), \dots, x^n(t)),$$

则显然 dg 是满射, 0 为其正则值, $g^{-1}(0) = X \cap V$ 以及 $\text{Ker } dg_q = T_q X$.

若要求 $f^{-1}(X)$ 为子流形, 只需对任意 $p \in f^{-1}(X)$, 找到 p 在 M 中的开邻域 U 使得 $U \cap f^{-1}(X)$ 为 M 的子流形. 设 $q = f(p)$, $U = f^{-1}(V)$, 则

$$U \cap f^{-1}(X) = f^{-1}(V \cap X) = (g \circ f)^{-1}(0),$$

因此只要 0 为 $g \circ f$ 的正则值, $f^{-1}(X)$ 就是 M 的子流形, 而这当且仅当 $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ 为满射, 考虑如下引理:

引理 6.8

设线性映射 $L: V \rightarrow W$ 为满射, $V_1 \leq V$, 则 $L(V_1) = W$ 当且仅当 $V_1 + \text{Ker } L = V$.

注意到 $\text{Im } d(g \circ f)_p = dg_{f(p)}(\text{Im } df_p)$, 因此为了 $d(g \circ f)_p$ 为满射, 仅需假设 “ $\text{Im } df_p$ 包含某个 $T_q X$ 在 $T_q N$ 中的补空间”, 由此可以给出横截相交的定义:

定义 6.12 (映射与子流形的横截相交)

设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射, $X \subset N$ 为子流形, 若对任意 $p \in f^{-1}(X)$ 有 $\text{Im } df_p + T_{f(p)} X = T_{f(p)} N$, 则称 f 与 X 横截相交.

注

1. 注意到横截相交的条件仅依赖 f , 与上述讨论中的 g 无关.
2. 若 $f^{-1}(X) = \emptyset$, 则 f, X 显然横截相交.
3. 若任意 $q \in X$ 都是 $f: M \rightarrow N$ 的正则值, 则 f 在任意 $p \in f^{-1}(X)$ 处都是淹没, 此时 $\text{Im } df_p = T_{f(p)} N$, 因此条件显然满足, 并且进一步有推论:

推论 6.12 (淹没总是横截)

若 $f: M \rightarrow N$ 为淹没, 则 f 与 N 的任意光滑子流形 X 都横截相交.

回到一开始, 正如我们希望的有:

定理 6.27 (横截相交下子流形的原像仍为子流形)

设 $f: M \rightarrow N$ 与 $X \subset N$ 横截相交, 则 $f^{-1}(X)$ 是 M 的子流形, 并且 $\text{codim } f^{-1}(X) = \text{codim } X$ 以及对任意 $p \in f^{-1}(X)$ 有

$$T_p f^{-1}(X) = df_p^{-1}(T_{f(p)} X).$$



证明 由于 0 为 $g \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^l$ 的正则值, 因此 $f^{-1}(X)$ 维数为 $m - l = m - n + \dim X$, 因此 $\text{codim } f^{-1}(X) = \text{codim } X$. 进一步

$$T_p f^{-1}(X) = \text{Ker } d(g \circ f)_p = (df_p)^{-1}(dg_{f(p)})^{-1}(0) = df_p^{-1}(T_{f(p)} X).$$

注 证明中省略了一些说明, 例如 g 应当是局部构造的, $(g \circ f)^{-1}(0) = X \cap V$, 不过无伤大雅.

设 X_1, X_2 都是 M 的子流形, $\iota: X_1 \hookrightarrow M$ 为嵌入, 则 ι 与 X_2 横截当且仅当对任意 $p \in \iota^{-1}(X_2) = X_1 \cap X_2$ 有

$$T_p(M) = \text{Im } d\iota_p + T_p X_2 = T_p X_1 + T_p X_2,$$

这也称为两个子流形的横截.

定义 6.13 (子流形之间的横截相交)

称 M 的子流形 R, S 横截相交, 若对任意 $x \in R \cap S$ 有 $T_x S + T_x R = T_x M$.



注 类似地, 若 $R \cap S = \emptyset$ 则它们显然横截相交.

显然若 X_1, X_2 横截相交, 则 $X_1 \cap X_2$ 为 M 的子流形, 并且

$$\dim X_1 \cap X_2 = \dim X_1 - (\dim M - \dim X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim M,$$

或者说 $\text{codim } X_1 \cap X_2 = \text{codim } X_1 + \text{codim } X_2$ (这表明在交点处, 定义 X_1, X_2 的方程组 “无关”, 进而可以合在一起定义余维数更高的子流形), 并且切空间

$$d\iota_p^{-1}(T_p X_2) = T_p(X_1 \cap X_2) = T_p X_1 \cap T_p X_2.$$

回到正题, 设 R, S 为 M 的两个横截相交的闭子流形, 则余维数关系

$$\text{codim } R \cap S = \text{codim } R + \text{codim } S$$

表明 $N(R \cap S) = NR \oplus NS$, 若 M 可定向, 则

$$\Phi(N(R \cap S)) = \Phi(NR \oplus NS) = \Phi(NR) \wedge \Phi(NS),$$

类似有 $\eta_{R \cap S} = \eta_R \wedge \eta_S$.

附录 A 补充内容

A.1 借商拓扑构造流形

拓扑流形是 T2/A2 的局部欧空间, 由于这三者具有可乘性与遗传性, 因此从已有拓扑流形可以轻松构造出乘积流形、子流形. 本节将讨论商映射构造流形的一些条件与判别法.

一方面, 对于商映射 $\pi: S \rightarrow S/\sim$, 商空间 $S/\sim$ 为 Hausdorff 空间, 因此单点 $\{\pi(p)\}$ 都是闭集, 根据商映射的定义可知其原像 $\pi^{-1}(\pi(p)) = [p]$ 也是闭集, 因此可以得到一个简单的判别法.

命题 A.1

若商空间 $S/\sim$ 为 Hausdorff 空间, 则对任意 $p \in S$, 其所处等价类 $[p]$ 为闭集.

定义 A.1 (开等价关系)

称拓扑空间 S 中的等价关系 $\sim$ 为开等价关系, 若商映射 $\pi: S \rightarrow S/\sim$ 为开映射.

注 根据定义, π 为开映射当且仅当对任意开集 $U \subset S$, $\pi(U)$ 为开集, 也当且仅当 $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in U} [x]$ 为开集.

回忆: 拓扑空间 S 是 Hausdorff 的当且仅当其对角集 Δ 在 $S \times S$ 中为闭集. 称 $R = \{(x, y) \in S \times S : x \sim y\}$ 为等价关系的图, 则在开等价关系下, 可以给出 Hausdorff 性的等价刻画.

命题 A.2 (开映射商空间的 Hausdorff 性)

设 $\sim$ 为 S 中的开等价关系, 则 $S/\sim$ 为 Hausdorff 空间当且仅当其图 R 为 $S \times S$ 中的闭集.

证明 设 Δ' 为 $S/\sim$ 的对角集, π 为开映射说明 $\tilde{\pi} = (\pi, \pi): S \times S \rightarrow S/\sim \times S/\sim$ 也是开映射, 注意到

$$R = \tilde{\pi}^{-1}(\Delta'), \quad \tilde{\pi}(R) = \Delta', \quad \tilde{\pi}(R^c) = (\Delta')^c,$$

因此 $S/\sim$ 为 Hausdorff 空间 $\Leftrightarrow \Delta'$ 为闭集 $\Leftrightarrow R$ 为闭集.

对于开等价关系, 对其拓扑基与可数性也有一些较好的结论.

定理 A.1

设 $\sim$ 为 S 上的开等价关系, $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ 为 S 的拓扑基, 则其像 $\{\pi(B_\alpha)\}$ 为 $S/\sim$ 的拓扑基.

推论 A.1

设 $\sim$ 为 S 上的开等价关系, 若 S 是 A2 的, 则 $S/\sim$ 也是 A2 的.

实射影空间

定义 A.2 (实射影空间)

定义 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 中的等价关系

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists t \neq 0 : y = tx,$$

称商空间 $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ 为 n 维实射影空间.

注

1. 直观而言, $x \sim y$ 当且仅当它们位于同一条过原点的直线上.
2. 对于 $(a^0, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, 通常记 $[a^0, \dots, a^n] = \pi(a^0, \dots, a^n)$, 称为 $\mathbb{RP}^n$ 的齐次坐标.

实射影空间也可以视为将 S^n 的对径点相粘得到的商空间, 考虑映射

$$f: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|},$$

则它可以诱导连续映射

$$\bar{f}: \mathbb{RP}^n \rightarrow S^n / \sim, \quad x \mapsto \{f(x), -f(x)\},$$

容易验证其可逆且逆也是连续的, 故为同胚.

例 A.1

- $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.
- $\mathbb{RP}^2 \cong S^2 - \{pt\}$.

下面证明, 实射影空间是 A2+T2 的.

命题 A.3

设 $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$, 则 $\sim$ 为开等价关系.

证明 对任意开集 $U \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $\pi(U)$ 为开集当且仅当 $\pi^{-1}(\pi(U))$ 为开集, 而

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \neq 0} tU = \bigcup_{t \neq 0} \{tp : p \in U\},$$

由于开集的伸缩依然是开集, 因此 $\pi^{-1}(\pi(U))$ 为开集, 得证.

推论 A.2

$\mathbb{RP}^n$ 是 A2+T2 的.

证明 由于 $\sim$ 为开等价关系, $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 是 A2 的说明 $\mathbb{RP}^n$ 是 A2 的, 下面只需证明图闭集, 实际上

$$R = \{(x, y) : x \sim y\} = \{(x, y) : y = tx, \exists t \neq 0\},$$

若将其中 x, y 视为列向量并置, 可得 $(n+1) \times 2$ 矩阵 (x, y) , 图的定义说明该矩阵秩为 1, 而秩为 1 的 $(n+1) \times 2$ 矩阵实际上是所有二阶子式零点集的交, 因此是闭集, 得证.

最后我们给出 $\mathbb{RP}^n$ 上的光滑图册, 从而说明它是一个光滑流形. 借助齐次坐标, 定义开集

$$U_i = \{[a^0, \dots, a^n] \in \mathbb{RP}^n : a^i \neq 0\}, \quad i = 0, \dots, n,$$

则 $U_0, \dots, U_n$ 构成 $\mathbb{RP}^n$ 的开覆盖, 进而定义同胚

$$\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [a^0, \dots, a^n] \mapsto \left(\frac{a^0}{a^i}, \dots, \frac{a^{i-1}}{a^i}, \frac{a^{i+1}}{a^i}, \dots, \frac{a^n}{a^i} \right),$$

因此 (U_i, ϕ_i) 为 $\mathbb{RP}^n$ 中的坐标卡, 最后证明转移映射是相容的, 根据对称性, 只需证明 $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ 的光滑性. 对任意 $x = (x^1, \dots, x^n) \in \phi_0(U_0 \cap U_1)$ 有

$$(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(x) = \phi_1([1, x^1, \dots, x^n]) = \left(\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \dots, \frac{x^n}{x^1} \right),$$

它是光滑的, 因此 $\mathbb{RP}^n$ 为 n 维光滑流形.

A.2 Whitney 嵌入定理

定理 A.2 (Whitney 嵌入/浸入定理)

- 任意 m 维光滑流形都能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中.
- 任意 m 维光滑流形都能被浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中.

注 事实上, Whitney 还证明了更强的结果:

定理 A.3 (强 Whitney 嵌入/浸入定理)

任意 $m \geq 2$ 维光滑流形都能嵌入到 $\mathbb{R}^{2m}$, 浸入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中.



并且该嵌入维数是最佳的 (射影平面不能嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中). 此外, 在附加一些条件后, 嵌入/浸入的最佳维数也有可能改变.

定理证明的出发点是如下结论:

命题 A.4 (单浸入 + 逆紧 = 嵌入)

若 $f: M \rightarrow N$ 为逆紧单浸入, 则 f 是嵌入.



注 特别当 M 紧时, 所有连续映射都是逆紧映射, 因此逆紧映射也常作为空间紧性的代餐.

根据这一结果, 因此构造嵌入等价于构造单浸入. 定理的证明分为如下步骤 (Step 2,3 不区分紧致与否):

【Step 1a】 紧流形 M 可以单浸入到足够高维的 $\mathbb{R}^K$ 中.

【Step 1b】 非紧流形 M 可以单浸入到足够高维的 $\mathbb{R}^K$ 中, 并且当 $K > 2m$ 时, 单浸入可取为逆紧.

【Step 2】 对于 m 维流形 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^K$, 若 $K > 2m + 1$, 则将 $\mathbb{R}^K$ 投影到特定的 $\mathbb{R}^{K-1}$ 中可以使维数下降 (即得嵌入定理).

【Step 3】 在上一步基础上, 若不要求单性则可再降一维 (即得浸入定理).

定理 A.4 (Step 1a)

任意紧光滑流形 M 可以单浸入到足够高维的 $\mathbb{R}^K$ 中.



证明 取有限个坐标卡 $\{(\phi_i, U_i, V_i) : 1 \leq i \leq k\}$ 覆盖 M , 取 $\{\rho_i\}$ 为从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解, 定义

$$\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{km+k}, \quad p \mapsto (\rho_1(p)\phi_1(p), \dots, \rho_k(p)\phi_k(p), \rho_1(p), \dots, \rho_k(p)),$$

显然 Φ 光滑, 下证 Φ 为单浸入, 首先若 $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$ 则存在 $1 \leq i \leq k$ 使得 $\rho_i(p_1) = \rho_i(p_2) \neq 0$, 则 $p_1, p_2 \in \text{supp } \rho_i \subset U_i$, 因此 $\phi_i(p_1) = \phi_i(p_2)$, 说明 $p_1 = p_2$.

进一步由 Leibnitz 法则有

$$\begin{aligned} d\Phi_p(X_p) &= (X_p(\rho_1)\phi_1(p) + \rho_1(p)(d\phi_1)_p(X_p), \dots, \\ &\quad X_p(\rho_k)\phi_k(p) + \rho_k(p)(d\phi_k)_p(X_p), X_p(\rho_1), \dots, X_p(\rho_k)), \end{aligned}$$

若 $d\Phi_p(X_p) = 0$ 则对每个 i 都有 $X_p(\rho_i) = 0$, 从而 $\rho_i(p)(d\phi_i)_p(X_p) = 0$, 取 $1 \leq i \leq k$ 使得 $\rho_i(p) \neq 0$, 则由 $(d\phi_i)_p(X_p) = 0$ 可得 $X_p = 0$.

注 事实上, 这一证明的紧性可以减弱为 “被有限个坐标卡覆盖”.

定理 A.5 (Step 1b)

任意非紧光滑流形 M 可以单浸入到足够高维的 $\mathbb{R}^K$ 中,

**定理 A.6 (Step 1b)**

若 m 维非紧光滑流形 M 能单浸入到 $\mathbb{R}^K$ 中, $K > 2m$, 则它可被逆紧单浸入到 $\mathbb{R}^K$ 中.

**定理 A.7 (Step 2: 降维)**

若 m 维光滑流形 M 可单浸入到 $\mathbb{R}^K$ 中且 $K > 2m + 1$, 则 M 可单浸入到 $\mathbb{R}^{K-1}$ 中.

**定理 A.8 (Step 3: 减弱条件)**

若 m 维光滑流形 M 可单浸入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中, 则它可被浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中.



A.3 张量相关

本节默认线性空间是有限维的.

¶ 对称张量与交错张量

命题 A.5

容易验证多重线性函数的空间同构于 $\mathcal{L}(\otimes^k V, \mathbb{R}) \cong \otimes^k V^*$.

注 因此我们常用 $\otimes^k V^*$ 来表示多重线性函数 $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ 的全体.

定义 A.3 (对称/反对称线性函数)

设 V 为线性空间, 称 k 重线性函数 $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ 是对称的, 若对任意 $\sigma \in S_k$ 有

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = f(v_1, \dots, v_k),$$

称之为反对称的, 若对任意 $\sigma \in S_k$ 有

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_1, \dots, v_k).$$

注 以 $\otimes^k V^*$ 的视角看, 它们也可称为**对称张量**和**交错张量** (也称**线性 k -形式**), 交错张量的全体也记为 $\Lambda^k V^*$.

例 A.2

- $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积 $\langle v, w \rangle$ 是对称的.
- $(\mathbb{R}^n)^n$ 上的行列式函数 $\det(v_1, \dots, v_n)$ 是反对称的.
- $\mathbb{R}^3$ 上的外积是反对称的.

对任意 $f \in \otimes^k V^*$, 可以借助置换 $\sigma \in S_k$ 定义新的 k 重线性函数

$$(\sigma f)(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

特别地, f 对称当且仅当对任意 σ 有 $\sigma f = f$; f 反对称当且仅当对任意 σ 有 $\sigma f = (\operatorname{sgn} \sigma) f$.

引理 A.1

设 $f \in \otimes^k V^*$, 则对任意 $\sigma, \tau \in S_k$ 有 $\tau(\sigma f) = (\tau\sigma)f$.

注 有时会将 σf 记为 f^σ , 此时 $(f^\sigma)^\tau = f^{\tau\sigma}$, 而不是 $f^{\sigma\tau}$.

上面的操作实际上可以视为置换群 S_k 在 $\otimes^k V^*$ 上的作用, 借此可以给出两个重要的操作: 对称化和反对称化.

定义 A.4 (对称化和反对称化)

设 $f \in \otimes^k V^*$, 则定义其对称化和反对称化为

$$\begin{aligned} (Sf)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \\ (Af)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

注 容易证明 Sf, Af 分别是对称/反对称的, 并且当且仅当 f 为对称或反对称时有 $Sf = f$ 或 $Af = f$.

楔积

定义 A.5 (楔积/外积)

对任意 $f \in \Lambda^k V^*, g \in \Lambda^l V^*$, 定义其楔积 (或外积) 为

$$f \wedge g = \frac{(k+l)!}{k!l!} A(f \otimes g) \in \Lambda^{k+l} V^*.$$

命题 A.6 (楔积的性质)

1. 双线性性: $(f, g) \mapsto f \wedge g$ 是双线性映射.
2. 反交换性: $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$.
3. 结合律: $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.

根据结合律, 可以定义更多线性形式的楔积, 特别对 $f^1, \dots, f^k \in V^*$ 有

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^k = k! A(f^1 \otimes \dots \otimes f^k),$$

并且这种楔积与行列式有直接联系.

推论 A.3 (行列式)

设 $f^1, \dots, f^k \in V^*, v_1, \dots, v_k \in V$, 则

$$(f^1 \wedge \dots \wedge f^k)(v_1, \dots, v_k) = \det(f^i(v_j)).$$

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned} (f^1 \wedge \dots \wedge f^k)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma(f^1 \otimes \dots \otimes f^k)(v_1, \dots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) f^1(v_{\sigma(1)}) \dots f^k(v_{\sigma(k)}) \\ &= \det(f^i(v_j)). \end{aligned}$$

借助楔积, 可以由 V^* 的基给出 $\Lambda^k V^*$ 的一组基.

定理 A.9 ($\Lambda^k V^*$ 的基)

设 $f^1, \dots, f^n$ 是 V^* 的一组基, 则

$$\{f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

给出了 $\Lambda^k V^*$ 的一组基, 特别地 $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$.

定义 A.6 (分次环)

称 k -代数 A 是分次环, 若其有 k -线性空间分解 $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$, 并且乘法将 $A^k \times A^l$ 映到 A^{k+l} . 若对任意 $a \in A^k, b \in A^l$ 有 $ab = (-1)^{kl} ba$, 则称它是反交换的.

注 对于分次环的同态, 我们要求其保持次数.

例 A.3

- 多项式环 $A = \mathbb{R}[x, y]$ 就是一个分次环.
- 若记 $\Lambda V^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k V^*$, 则它在楔积下构成一个分次环.

拉回

仿照线性映射 $L: W \rightarrow V$ 的对偶映射 $L^*: V^* \rightarrow W^*$, 可以定义在一般线性形式上的拉回.

定义 A.7 (线性映射的拉回)

设 $L: W \rightarrow V$ 为线性映射, 定义其在线性 k -形式上的拉回为

$$L^*: \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^k W, \quad (L^* \alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(L(v_1), \dots, L(v_k)).$$

**命题 A.7 (拉回保持楔积)**

设线性映射 $L: W \rightarrow V$, α, β 为 V 上的线性形式, 则有

$$L^*(\alpha \wedge \beta) = L^* \alpha \wedge L^* \beta.$$

**定义 A.8 (分次环上的反导子)**

设 $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ 为 $\mathbb{R}$ -分次环, 称 $\mathbb{R}$ -线性算子 $D: A \rightarrow A$ 为其上的一个反导子, 若对任意 $\omega \in A^k, \tau \in A^l$ 有

$$D(\omega \cdot \tau) = (D\omega) \cdot \tau + (-1)^k \omega \cdot D\tau.$$

称反导子 D 次数为 m , 若对任意 $\omega \in A$ 有 $\deg D\omega = \deg \omega + m$.

**定义 A.9 (内乘)**

对任意 $v \in V$, 定义内乘

$$\iota_v: \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{k-1} V^*, \quad \iota_v \alpha(v_1, \dots, v_{k-1}) = \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

**命题 A.8**

设 $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^*$, 则对任意 $v \in V$ 有

$$\iota_v(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha^i(v) \alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \dots \wedge \alpha^k.$$



证明 借助行列式计算可得.

命题 A.9 (内乘的性质)

设 $\alpha \in \Lambda^k V^*, \beta \in \Lambda^l V^*$, 则对任意 $v \in V$ 有

1. $\iota_v \circ \iota_v = 0$.
2. $\iota_v(\alpha \wedge \beta) = (\iota_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_v \beta)$.



证明 由于 ι_v 对 α, β 均为线性, 因此可不妨设 $\alpha = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k, \beta = \alpha^{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha^{k+l}$, 则

$$\begin{aligned} \iota_v(\alpha \wedge \beta) &= \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha^i(v) \alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \dots \wedge \alpha^k \right) \wedge \alpha^{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha^{k+l} \\ &\quad + (-1)^k \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \wedge \left(\sum_{i=1}^l (-1)^{i-1} \alpha^{k+i}(v) \alpha^{k+1} \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^{k+i}} \wedge \dots \wedge \alpha^{k+l} \right) \\ &= (\iota_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_v \beta). \end{aligned}$$

A.4 上链复形

定义 A.10 (上链复形)

设有一族线性空间 $\{C^k : k \in \mathbb{Z}\}$ 以及线性映射 $d_k : C^k \rightarrow C^{k+1}$, 满足 $d_k \circ d_{k-1} = 0$, 则称 (C, d) 为一个上链复形.

$$\cdots \longrightarrow C^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

其中 C^k 中的元素称为 k -上链; $Z^k(C) = \text{Ker } d_k$ 中的元素称为 k -上圈; $B^k(C) = \text{Im } d_{k-1}$ 中的元素称为 k -上边界.



注

- 有时为简便起见, 也会省略下标, 将 d_k 均记为 d .
- 若反过来考虑 $\{C_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 以及线性映射 $d_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ 满足 $d_k \circ d_{k+1} = 0$, 可以定义出链复形以及链/圈/边界的概念.

根据定义, 对上链复形 (C, d) 有 $\text{Im } d_{k-1} \subset \text{Ker } d_k$, 因此可定义“上链复形的上同调群”

$$H^k(C, d) = \text{Ker } d_k / \text{Im } d_{k-1},$$

特别当每个 $\text{Ker } d_k = \text{Im } d_{k-1}$ (或者说 $H^k(C, d) = \{0\}$) 时称之为正合列 (这实际上也是同调代数中正合列的定义). 关于长度有限的正合列有如下命题

命题 A.10

若 $0 \rightarrow C^1 \rightarrow \cdots \rightarrow C^n \rightarrow 0$ 是正合列, 则 $\sum_k (-1)^k \dim C^k = 0$.



定义 A.11 (上链映射)

设 $(A, d), (B, d')$ 为两个上链复形, 称 $\phi : A \rightarrow B$ 为上链映射, 若 $\phi = \{\phi_k : A^k \rightarrow B^k\}$ 满足 $d' \circ \phi_k = \phi_{k+1} \circ d_k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A^{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & A^0 & \xrightarrow{d_0} & A^1 & \xrightarrow{d_1} & A^2 & \xrightarrow{d_2} & \cdots \\ & & \downarrow \phi_{-1} & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \\ \cdots & \longrightarrow & B^{-1} & \xrightarrow{d'_{-1}} & B^0 & \xrightarrow{d'_0} & B^1 & \xrightarrow{d'_1} & B^2 & \xrightarrow{d'_2} & \cdots \end{array}$$



事实上, 上链复形与上链映射构成了一个范畴.

定义 A.12 (上链映射诱导上同调群同态)

设 $\phi : A \rightarrow B$ 为上链映射, 则有良定的

$$\phi^* : H^k(A) \rightarrow H^k(B), \quad [a] \mapsto [\phi(a)].$$



根据上链映射的定义, 良定性是易证的.

线性空间链的正合性可以推广到上链复形上.

定义 A.13 (上链复形的正合列)

称 $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ 正合, 若 i, j 是上链映射并且对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 有短正合列

$$0 \longrightarrow A^k \xrightarrow{i_k} B^k \xrightarrow{j_k} C^k \longrightarrow 0$$



给定上链复形链 $A \rightarrow B \rightarrow C$, 对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 有拉回短链

$$H^k(A) \rightarrow H^k(B) \rightarrow H^k(C),$$

如果有正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 那么对任意 k 可以定义连接同态 $d^* : H^k(C) \rightarrow H^{k+1}(A)$, 并且进一步得

到一个超长的正合列. 连接同态的定义依托下图 (我们将三个上链复形中的映射均记为 d)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^{k+1} & \xrightarrow{i} & B^{k+1} & \xrightarrow{j} & C^{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & A^k & \xrightarrow{i} & B^k & \xrightarrow{j} & C^k \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow{i} & B^{k-1} & \xrightarrow{j} & C^{k-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

自然的想法是定义

$$d^* : H^k(C) \rightarrow H^{k+1}(A), \quad [a] \mapsto [i^{-1} \circ d \circ j^{-1}(a)],$$

良定性的验证只需追图即可. 借助这一映射, 可以给出一个超长的正合列.

定理 A.10 (Zig-Zag)

设有上链复形的正合列 $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$, 则有长正合列

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & H^{k+1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^*} & H^{k+1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j^*} & \dots \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
 & & & d^* & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
 \rightarrow & H^k(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j^*} & H^k(\mathcal{C}) \rightarrow \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
 & & & d^* & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
 \dots & \xrightarrow{i^*} & H^{k-1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j^*} & H^{k-1}(\mathcal{C}) \rightarrow
 \end{array}$$

证明 【Step 1. 验证 d^* 的良定性】

首先对任意 $a \in \text{Ker } d_C^k$, $j^k : B^k \rightarrow C^k$ 满说明可以找到 $b \in j^{-1}(a) \subset B^k$, 而 $j^{k+1}d(b) = dj^k(b) = 0$ 说明 $d(b) \in \text{Ker } j^{k+1} = \text{Im } i^{k+1}$, 由此也能找到 $a' \in i^{-1}(db) = i^{-1} \circ d \circ j^{-1}(a)$.

进一步, 设 $a_1, a_2 \in \text{Ker } d_C^k, a_1 - a_2 = d\gamma \in \text{Im } d_C^{k-1}$, 任取 $b \in j^{-1}(a_1 - a_2) = j^{-1}(d\gamma) \subset B^k, \beta \in j^{-1}(\gamma) \subset B^{k-1}$, 则 $j(b) = d\alpha = dj(\beta) = j(d\beta)$ 说明 $b - d\alpha \in \text{Ker } j = \text{Im } i$, 即存在 $\alpha \in A^k$ 使得 $b = i\alpha + d\beta, db = di\alpha = id\alpha$, i 为单射说明 $i^{-1}(db) = d\alpha$, 故 $i^{-1}dj^{-1}(a_1 - a_2) = d\alpha \in \text{Im } d_A^k$, 因此 $[i^{-1}dj^{-1}(a_1)] = [i^{-1}dj^{-1}(a_2)]$ in $H^{k+1}(A)$, 故 d^* 是良定的.

【Step 2. 证明 $H^k(A)$ 位置的正合性】

$\text{Im } d^* \subset \text{Ker } i^*$: 对任意 $[c] \in H^{k-1}(C)$ 都有 $i^*d^*[c] = i^*[i^{-1}dj^{-1}(c)] = [dj^{-1}(c)] = 0$.

$\text{Im } d^* \supset \text{Ker } j^*$: 若 $i^*[a] = 0$, 即 $i(a) = d\beta$, 令 $c = j(\beta) \in C^k$, 则 $d^*[c] = [i^{-1}dj^{-1}(c)] = [a]$, 故 $[a] \in \text{Im } d^*$.

【Step 3. 证明 $H^k(B)$ 位置的正合性】

$\text{Im } i^* \subset \text{Ker } j^*$: 根据函子性以及 $j \circ i = 0$ 可得.

$\text{Im } i^* \supset \text{Ker } j^*$: 若 $j^*[b] = 0$, 即 $j(b) = d\gamma$, 则取 $\beta \in j^{-1}(\gamma)$ 可得 $jd(\beta) = dj(\beta) = d\gamma = j(b)$, 即 $b - d\beta \in \text{Ker } j = \text{Im } i$, 存在 $a \in A^{k+1}$ 使得 $b = i(a) + d\beta$, 故 $[b] = i^*[a] \in \text{Im } i^*$.

【Step 4. 证明 $H^k(C)$ 位置的正合性】

$\text{Im } j^* \subset \text{Ker } d^*$: 对任意 $[b] \in H^k(B)$ ($b \in \text{Ker } d_B^k$) 有 $d^*j^*[b] = d^*[j(b)] = [i^{-1}d(b)] = 0$.

$\text{Im } j^* \supset \text{Ker } d^*$: 若 $d^*[c] = 0$, 即存在 $\alpha \in A^k, b \in j^{-1}(c) \subset B^k$ 使得 $id\alpha = db = di\alpha$, 因此 $b - i\alpha \in \text{Ker } d_B^k$, 故 $[c] = [j(b)] = j^*[b - i\alpha] \in \text{Im } j^*$.

上链同伦

定义 A.14 (上链同伦)

称 $\phi, \psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 上链同伦, 若存在次数为-1 的线性映射 $K : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 使得 $\phi - \psi = d \circ K + K \circ d$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{d} & A^{k-1} & \xrightarrow{d} & A^k & \xrightarrow{d} & A^{k+1} & \xrightarrow{d} & \cdots \\
 & & \nwarrow K & & \downarrow \phi - \psi & & \nwarrow K & & \downarrow \phi - \psi & & \nwarrow K & & \downarrow \phi - \psi & & \nwarrow K \\
 \cdots & \xrightarrow{d} & B^{k-1} & \xrightarrow{d} & B^k & \xrightarrow{d} & B^{k+1} & \xrightarrow{d} & \cdots
 \end{array}$$



注 次数为-1 表明 K 将 A^k 映到 B^{k-1} .

若要证明两个上链映射 $\phi, \psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 诱导相同的上同调群同态 ϕ^*, ψ^* , 一个方法是证明它们存在上链同伦.

命题 A.11

若上链映射 $\phi, \psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 上链同伦, 则其诱导相同的上同调群同态 $\phi^* = \psi^* : H^k(\mathcal{A}) \rightarrow H^k(\mathcal{B})$.



证明 对任意 $[a] \in H^k(\mathcal{A})$ 有

$$\phi(a) - \psi(a) = (dh + hd)(a) = dK(a) \in B^k(M),$$

因此 $\phi^*([a]) = [\phi(a)] = [\psi(a)] = \psi^*([a])$.