



# 复分析笔记

作者：吕浩哲 (Lucas Shen)

时间：July 15, 2025

封面：<https://www.pixiv.net/artworks/100631860>

悟已往之不谏，知来者之可追。——陶渊明

# 目录

<b>第 1 章 复分析前置理论</b>	<b>1</b>
1.1 复数与复平面	1
1.1.1 基本性质	1
1.1.2 收敛性	1
1.1.3 复平面上的拓扑	2
1.2 复平面上的函数	2
1.2.1 连续函数	2
1.2.2 全纯函数	3
1.2.3 映射视角下的复变函数	3
1.2.4 幂级数	5
1.3 曲线积分	7
<b>第 2 章 Cauchy 定理及其应用</b>	<b>10</b>
2.1 Goursat 定理	10
2.2 圆盘上的 Cauchy 定理	11
2.3 借助 Cauchy 定理计算积分	12
2.4 Cauchy 积分公式	14
2.5 更多的应用	18
2.5.1 Morera 定理	18
2.5.2 全纯函数列	18
2.5.3 根据积分定义的全纯函数	19
2.5.4 Schwarz 反射原理	20
2.5.5 Runge 逼近定理	21
<b>第 3 章 亚纯函数与对数</b>	<b>24</b>
3.1 零点与极点	24
3.2 留数公式	25
3.2.1 一些例子	26
3.3 奇点与亚纯函数	29
3.4 辐角原理及应用	32
3.5 同伦与单连通性	33
3.6 复对数	35
3.7 Fourier 级数与调和函数	37
<b>第 4 章 Fourier 变换</b>	<b>39</b>
4.1 函数类 $\mathfrak{F}$	39
4.2 $\mathfrak{F}$ 中的 Fourier 变换	39
4.3 Paley-Wiener 定理	43
<b>第 5 章 整函数</b>	<b>47</b>
5.1 Jensen 等式	47
5.2 有限阶函数	48
5.3 无穷乘积	49

---

5.4	Weierstrass 无穷乘积 . . . . .	51
5.5	Hadamard 分解定理 . . . . .	52
<b>第 6 章</b>	<b>Gamma 函数与 Zeta 函数</b>	<b>56</b>
6.1	Gamma 函数 . . . . .	56
6.2	Zeta 函数 . . . . .	60

# 第 1 章 复分析前置理论

## 1.1 复数与复平面

许多概念都已经接触过，因此这里简单水一遍。

### 1.1.1 基本性质

复数形如  $z = x + iy$ ，这里  $x, y \in \mathbb{R}$ ， $i$  为复数单位满足  $i^2 = -1$ ，这里  $x, y$  分别称为  $z$  的实部与虚部，记为

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z) \quad (1.1)$$

特别的，虚部为 0 的复数就是实数，而实部为 0 的复数被称为纯虚数。如果考虑平面直角坐标系，横轴表示实部，纵轴表示虚部，则可以得到复平面，从这一角度看  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ，因此可以用  $(x, y)$  表示复数  $z = x + iy$ 。

复数之间可以作加法、乘法、除法（非零），并且  $\mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$  分别是加法与乘法的 Abel 群，因此  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  是一个域，另外，复数域可以看作  $\mathbb{R}$  的一个扩域，即  $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ ，并且根据某个域论中的结论（利用  $i$  在  $\mathbb{R}$  中的极小多项式为  $x^2 + 1$ ）

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{R}(i) = \mathbb{C} \quad (1.2)$$

这也可以看作复数域的等价描述。

复数还有一些重要的属性，比如模长与共轭。模长定义为  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，这可以看作复平面上点到原点的距离，在此视角下也容易得到复数间的“距离”公式。复数的模长也满足三角不等式，即

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \quad (1.3)$$

有时也会做一些变形（形式上与实数的绝对值“同构”）。共轭复数从几何上来看就是对实轴作对称，定义  $z = x + iy$  的共轭复数为  $\bar{z} = x - iy$ ，利用共轭复数可以描述实部与虚部

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (1.4)$$

因此后面的一些求导公式也有用  $z, \bar{z}$  表示的版本。共轭与模长之间也有联系，比如计算易得

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0 \quad (1.5)$$

复数还有一种表示，相当于将直角坐标改为极坐标，可以利用模长与辐角表示为  $z = re^{i\theta}$ ，这里  $r = |z|$ ，二者可以通过 Euler 公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  联系。这种形式下，复数的乘积就有直观的“模相乘，角相加”的形式。

### 1.1.2 收敛性

因为前面提到了  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ，因此可以考虑复数列的收敛性。其中范数就是模长  $|\cdot|$ ，由此可以诱导出距离  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ 。

#### 定义 1.1 (复数列的收敛)

称复数列  $\{z_n\}$  收敛于  $z \in \mathbb{C}$ ，若对于任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N \in \mathbb{N}$  使得对任意  $n > N$  都有  $|z_n - z| < \varepsilon$ ，记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0, \quad z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n. \quad (1.6)$$

这在形式上与实数是相同的，并且容易验证复数列  $\{z_n\}$  收敛到  $z$  当且仅当该复数列的实部与虚部分别收敛到  $z$  的实部与虚部。类似  $\mathbb{R}$  中也可以得到 Cauchy 收敛原理。

#### 定义 1.2 (Cauchy 列)

称一个复数列  $\{z_n\}$  是 Cauchy 列，若对于任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N$ ，对于任意  $m, n > N$  都有  $|z_m - z_n| < \varepsilon$ 。

**定理 1.1 (Cauchy 收敛原理)**

复数列  $\{z_n\}$  收敛当且仅当它是一个 Cauchy 列.



上面的定理实际上说明： $\mathbb{C}$  是一个完备度量空间.

**1.1.3 复平面上的拓扑**

同样根据  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  可以讨论复平面上的拓扑结构. 比如定义  $z_0$  为中心,  $r > 0$  为半径的开球及其闭包、边界

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \quad (1.7)$$

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \quad (1.8)$$

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \quad (1.9)$$

借助点集拓扑的基本理论, 可以根据距离  $d$  诱导出拓扑空间, 包括开集、闭集、内外部、紧致等概念. 对于  $\mathbb{C}$  中点集  $\Omega$ , 定义其半径为

$$\text{diam}(\Omega) = \sup_{z, w \in \Omega} |z - w|, \quad (1.10)$$

可见, 若  $\text{diam}(\Omega) < \infty$  则  $\Omega$  有界. 对于更多的性质懒于赘述, 下面仅列出几个命题.

**定理 1.2 (紧集套定理)**

若  $\mathbb{C}$  中非空紧集列满足  $\Omega_1 \supset \cdots \supset \Omega_n \supset \cdots$  并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\Omega_n) = 0$ , 那么存在唯一  $w \in \mathbb{C}$ , 对任意  $n \in \mathbb{N}$  都有  $w \in \Omega_n$ .

**定义 1.3 (连通性)**

称  $\Omega \subset \mathbb{C}$  连通, 若其不能分解为两个非空开集的并  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . 一个连通开集被称为区域.

**1.2 复平面上的函数****1.2.1 连续函数**

复平面中的连续函数与  $\mathbb{R}$  中定义类似.

**定义 1.4 (连续函数)**

设  $f$  为  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上的函数, 则称  $f$  在  $z_0 \in \Omega$  连续当且仅当对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得对任意  $z \in \Omega, |z - z_0| < \delta$ , 都有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad (1.11)$$

特别的, 若  $f$  在  $\Omega$  中每一点连续, 则称  $f$  为  $\Omega$  上的连续函数.



**注** 连续性还有两个等价定义:

1. 对任意收敛到  $z_0 \in \Omega$  的数列  $\{z_n\} \subset \Omega$ , 都有

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n). \quad (1.12)$$

2. 开集的原像还是开集.

容易发现, 若  $f(z)$  在  $\Omega$  上连续, 则实函数  $|f(z)|$  也在  $\Omega$  上连续, 我们称  $f$  在  $z_0 \in \Omega$  取到最大值, 若对任意  $z \in \Omega$ , 都有

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (1.13)$$

**定理 1.3**

定义在紧集  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上的有界连续函数  $f$  可以在  $\Omega$  内取到最大值.

这个结论对于  $\mathbb{R}^n$  中的函数也是成立的.

**1.2.2 全纯函数**

这部分介绍一个贯穿复分析的概念: 全纯函数.

**定义 1.5 (全纯函数)**

设  $f$  为定义在开集  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上的函数, 称  $f$  在  $z_0 \in \Omega$  全纯, 若下面的极限存在

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (1.14)$$

若上述极限存在, 则定义其为  $f'(z_0)$ , 称为  $f$  在  $z_0$  处的导数. 特别的, 若  $f$  在  $\Omega$  每一点全纯, 则称  $f$  是  $\Omega$  上的全纯函数;  $\mathbb{C}$  上的全纯函数称为整函数.

有时也用复可导表示指代全纯, 从定义来看, 全纯与  $\mathbb{R}$  上可导的形式相同. 后面会证明, 复数域中的这种可微具有更强的性质.

因为全纯与实可导有相同的形式, 因此可以直接求出许多初等函数的导数. 借助定义, 容易发现一些不全纯的函数, 比如  $f(z) = \bar{z}$ . 借助幂级数, 还可以构造出许多解析函数. 类比实函数的可微, 可得

**命题 1.1**

设  $f, g$  为  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上的全纯函数, 则

1.  $f + g$  也是  $\Omega$  上的全纯函数, 并且  $(f + g)' = f' + g'$ .
2.  $fg$  也是  $\Omega$  上的全纯函数, 并且  $(fg)' = f'g + fg'$ .
3. 若  $g(z_0) \neq 0$ , 则  $f/g$  在  $z_0$  处全纯, 并且即  $(f/g)' = (f'g - g'f)/g^2$ .

**命题 1.2**

若  $f: \Omega \rightarrow U, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  均为全纯函数, 那么  $g \circ f$  也是全纯函数, 并且  $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ .

**1.2.3 映射视角下的复变函数**

由于  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , 所有复变函数可以看作  $\mathbb{R}^2$  到自身的一个函数, 比如将  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  看作  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ . 并且复变函数  $f$  连续当且仅当其实部与虚部都连续, 因此会产生问题:  $f$  全纯与其分量的可微性之间是否存在联系? 前面提到过一个不全纯的函数  $f(z) = \bar{z}$ , 它可以看作  $\mathbb{R}^2$  上的函数  $f(x, y) = (x, -y)$ , 这个函数在  $\mathbb{R}^2$  中来看是可微的 (可计算其 Jacobi 矩阵), 但在  $\mathbb{C}$  中又是不可微的.

上面的例子说明, 实可微 (即实、虚部分量构成的函数  $F$  可微) 并不蕴含全纯, 下面从映射的可微性的角度讨论上面的问题.

称函数  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  在  $P_0(x_0, y_0)$  处可微, 当且仅当存在线性映射  $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 使得

$$\lim_{|H| \rightarrow 0} \frac{|F(P_0 + H) - F(P_0) - J(H)|}{|H|} = 0 \quad (1.15)$$

或者可以写作  $F(P_0 + H) - F(P_0) = J(H) + o(|H|)$ , 其中线性映射  $J$  称为  $F$  在  $P_0$  处的微分, 它在标准基下的矩阵为

$$J = J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

实微分的结果是一个矩阵，而复微分的结果是一个复数  $f'(z_0)$ ，可以从  $h$  的不同路径角度考虑二者之间的联系，令  $h = h_1 + ih_2$ ，若  $h_2 = 0$ ，则对于  $z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, f(z) = f(x, y)$ ，可以发现

$$f'(z_0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} \quad (1.17)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad (1.18)$$

这里相对于固定了  $y = y_0$ ，如果固定  $x = x_0$ ，令  $h_1 = 0$ ，则

$$f'(z_0) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \quad (1.20)$$

结合上面两式可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1.21)$$

如果写作  $f = u + iv$ ，那么上面的等式可以分别考虑实部与虚部得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.22)$$

这个等式被称为 **Cauchy-Riemann 方程**，它连接了实可微与复可微性。有时也会使用算子

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.23)$$

Cauchy-Riemann 方程也表示为  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 。

#### 定理 1.4

若  $f$  在  $z_0$  处全纯，则  $f$  满足 Cauchy-Riemann 方程，并且有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \quad (1.24)$$

若令  $a = \frac{\partial u}{\partial x}, b = \frac{\partial u}{\partial y}$ ， $F(x, y) = f(z) = f(x + iy)$ ，则  $F$  可微，并且

$$J_F = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \det J_F(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2. \quad (1.25)$$

**证明** 根据前面的讨论，全纯性蕴含 C-R 方程以及对应  $\mathbb{R}^2$  上函数的可微性，并且

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) \quad (1.26)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \right) \quad (1.27)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \quad (1.28)$$

则 Jacobi 矩阵及其行列式为

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \det J_F(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left| 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 = |f'(z_0)|^2. \quad (1.29)$$

上面的结果并不足以令人感叹，接下来的定理揭示了 C-R 方程的纽带作用。

#### 定理 1.5

设  $f = u + iv$  为定义在开集  $\Omega$  上的复变函数，若  $u, v$  均连续可微并且满足 Cauchy-Riemann 方程，那么  $f$  在  $\Omega$  内全纯，并且  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ 。

**证明** 易知

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + o(|h|) \quad (1.30)$$

$$v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 + o(|h|) \quad (1.31)$$

借助 C-R 方程可得

$$f(z+h) - f(z) = [u(z+h) - u(z)] + i[v(z+h) - v(z)] \quad (1.32)$$

$$= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 \right] + i \left[ \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 \right] + o(|h|) \quad (1.33)$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) (h_1 + ih_2) + o(|h|) \quad (1.34)$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) h + o(|h|) \quad (1.35)$$

得证, 且有  $f'(z) = 2 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$

## 1.2.4 幂级数

因为复数列与实数列在收敛等分析性质上相似, 因此可以对复数定义级数, 进一步讨论幂级数. 复幂级数最典型的例子是复指数函数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (1.36)$$

它在形式上与实指数函数一样, 可以看作定义在实轴上的函数向复平面的“延拓”, 下面正式讨论复幂级数<sup>1</sup>.

### 定义 1.6 (幂级数)

设  $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ , 定义 (复) 幂级数为形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.37)$$

的级数.

与实数相同, 若幂级数在某个  $z_0 \neq 0$  处绝对收敛, 则它在所有  $|z| \leq |z_0|$  处均绝对收敛, 利用这一点可以定义出类似的收敛半径, 不过相比于实数, 这里的收敛半径确实与“半径”有关.

### 定义 1.7 (收敛半径)

对于幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , 若存在  $0 \leq R \leq \infty$  使得对任意  $|z| < R$  幂级数绝对收敛, 对任意  $|z| > R$  幂级数发散, 则称  $R$  为该幂级数的收敛半径,  $D_R(0) = \{z : |z| < R\}$  称为幂级数的收敛圆盘.

### 定理 1.6 (Hadamard 等式)

若借用记号  $1/0 = \infty, 1/\infty = 0$ , 则所有幂级数均存在收敛半径, 它由 Hadamard 等式给出

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (1.38)$$

**证明** 首先考虑  $0 < R < \infty$  的情形 ( $R$  由 Hadamard 等式给出), 假设  $r < R$ , 则

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}, \quad (1.39)$$

因此存在充分小的  $\varepsilon > 0$ , 当  $n$  充分大时就有

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1-\varepsilon}{r}, \quad |a_n| r^n < (1-\varepsilon)^n \quad (1.40)$$

与几何级数比较可知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  收敛, 得证.

<sup>1</sup>暂不讨论其各种收敛性, 实级数的诸多性质 (绝对收敛、条件收敛、一致收敛以及许多判别法) 可直接迁移过来.

假设  $r > R$ , 则仿照上面的过程, 存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $n$  充分大时, 就有

$$\frac{1+\varepsilon}{r} < |a_n|^{1/n}, \quad (1+\varepsilon)^n < |a_n|r^n \quad (1.41)$$

同样与几何级数比较可知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$  发散, 得证.

有许多在  $\mathbb{C}$  上收敛的幂级数, 比如基本的三角函数, 定义为

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (1.42)$$

与指数函数相同, 它们也可以看作余弦函数与正弦函数的延拓, 由此可得 Euler 等式

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1.43)$$

下面的定理表明, 幂级数可以构造出收敛圆盘内的全纯函数.

### 定理 1.7

幂级数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  定义出了收敛圆盘内的全纯函数, 它的导函数也是一个幂级数, 表示为

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (1.44)$$

并且与  $f$  有相同的收敛半径.



**证明** 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ , 因此根据上极限的运算可知上面两个幂级数的收敛半径是相同的, 设  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ , 下证  $g(z) = f'(z)$ . 设  $f$  给出的幂级数的部分和为  $S_N$ , 余项为  $E_N$ , 即  $f = S_N + E_N$ , 则

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) = \left( \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right) \quad (1.45)$$

$$+ (S'_N(z_0) - g(z_0)) + \left( \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} \right) \quad (1.46)$$

取定  $|z_0|, |z_0+h| < r < R$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取定  $N$  使得

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| + \left| \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n \sum (z_0+h)^k z_0^{n-k} \right| \quad (1.47)$$

$$\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^n \quad (1.48)$$

$$< \varepsilon/2, \quad (1.49)$$

对于上述  $N$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|h| < \delta$  时有

$$\left| \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \varepsilon/2, \quad (1.50)$$

对于这样的  $\delta$  有

$$\left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \right| < \varepsilon, \quad (1.51)$$

命题得证.

上述定理可直得推论

### 推论 1.1

幂级数在其收敛圆盘内无穷次可微, 各阶导数依然是幂级数, 且具有相同的收敛半径.



上面的讨论的幂级数都以原点为中心, 将其平移就可以得到以  $z_0 \in \mathbb{C}$  为中心的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (1.52)$$

这时的收敛圆盘变为了  $D_R(z_0)$ , 收敛半径依然由 Hadamard 等式给出. 这样的幂级数依然满足上面的各种性质.

前面提到过“解析性”, 借助幂级数可以正式给出解析性的定义.

### 定义 1.8 (解析函数)

称定义在开集  $\Omega$  上的函数是解析的, 若对于任意  $z_0 \in \Omega$ , 存在以  $z_0$  为中心的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ , 并且有正收敛半径. 反过来, 在一点  $z_0$  满足上述条件可视为  $f$  在点  $z_0$  处解析.



根据上面对幂级数的讨论可知, 解析函数一定是全纯的, 后面会证明一个更惊奇的性质: 全纯函数一定是解析的, 正因此, “全纯”与“解析”两词大部分时候可以混用.

## 1.3 曲线积分

### 定义 1.9 (参数曲线)

参数曲线是一个连续映射  $z: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 若  $z$  连续可微 (在端点仅一个单向可微), 并且  $z'(t) \neq 0$ , 则称之为光滑曲线; 若存在  $[a, b]$  的分割  $a = a_0 < \dots < a_n = b$ , 使得  $z$  在每一段  $[a_k, a_{k+1}]$  可微, 则称  $z$  分段可微.



通过选择不同的参数化, 可以得到相同曲线的不同表示, 比如有考虑从  $[c, d]$  到  $[a, b]$  的连续可微双射  $s \mapsto t(s)$ , 那么可以得到新的参数化  $\tilde{z}(s) = z(t(s))$ , 这实际上定义出了一个等价关系

### 定义 1.10 (曲线的等价)

称两个参数曲线  $z_1, z_2$  等价, 若存在连续可微双射  $\tau$  (并且  $\tau' > 0$ ) 使得  $z_1 = z_2 \circ \tau$ .



在等价的视角下, 一个等价类就确定了一个曲线  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , 并且它实际上是有正定向的 (参数从  $a$  到  $b$  变化), 因此可以定义负定向的曲线  $\gamma^-$ , 这也对应了映射  $z^-: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z^-(t) = z(b+a-t)$ .

如果一个曲线无自交, 则称之为简单曲线, 但若曲线  $z$  满足  $z(s) = z(t)$  仅  $s = t$  或  $\{s, t\} = \{a, b\}$ , 也认为曲线是简单曲线 (称为简单闭曲线).

综上, 在大多数时候我们所关心的都是分段光滑曲线, 因此一般“曲线”都指分段光滑曲线.

最简单的曲线的例子就是 (逆时针) 圆周  $z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ , 类似可知  $z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$  是对应的顺时针圆周.

在复分析中, 关于全纯函数的积分有一个非常美妙的结果: 假设  $f$  在闭曲线  $\gamma$  内部全纯, 那么  $f$  沿曲线积分为 0, 即

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.53)$$

这是下一章将介绍的 Cauchy 定理. 下面做一些积分的准备工作.

对于一个曲线  $\gamma$ , 由映射  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  参数化, 并且  $f$  在  $\gamma$  连续, 则可以定义沿  $\gamma$  的曲线积分

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (1.54)$$

为了保证上面是良定义的, 我们必须证明对于同一曲线的不同参数化, 或者说两条等价的曲线的积分是相同的, 这根据微分的形式不变性易得

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_c^d f(z(t(x))) z'(t(s)) t'(s) ds = \int_c^d f(\tilde{z}(s)) \tilde{z}'(s) ds \quad (1.55)$$

若  $\gamma$  是逐段可微的, 那么可以将其积分定义为

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t))z'(t)dt \quad (1.56)$$

此外, 可以定义可微曲线的长度为

$$l(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|dt \quad (1.57)$$

类似可证明, 这里也是良定义的. 若曲线是分段可微的, 则长度也定义为逐段积分之和. 容易验证, 上面的曲线积分有如下性质

### 命题 1.3

1. 线性: 对  $a, b \in \mathbb{C}$ , 有

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))dz = a \int_{\gamma} f(z)dz + b \int_{\gamma} g(z)dz. \quad (1.58)$$

2. 沿同一曲线的不同方向积分值相反

$$\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma^{-}} f(z)dz. \quad (1.59)$$

3. 绝对值不等式

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma) \quad (1.60)$$

在一元实积分中, 我们曾借助原函数给出了 Newton-Leibniz 公式, 可以证明, 若复变函数  $f$  在  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上存在原函数  $F$  使得  $F'(z) = f(z)$ , 那么对于  $\Omega$  内的曲线积分也有很好的结果.

### 定理 1.8

若连续函数  $f$  在  $\Omega$  上有原函数  $F$ , 设曲线  $\gamma \subset \Omega$  的起点与终点为  $w_1, w_2$ , 则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(w_2) - F(w_1). \quad (1.61)$$

**证明** 设  $\gamma$  的参数化为  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , 并且  $z(a) = w_1, z(b) = w_2$ . 若  $\gamma$  是光滑的, 则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \quad (1.62)$$

$$= \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt \quad (1.63)$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))dt \quad (1.64)$$

$$= F(z(b)) - F(z(a)) \quad (1.65)$$

若  $\gamma$  是分段光滑的, 则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} (F(z(a_{k+1})) - F(z(a_k))) \quad (1.66)$$

$$= F(z(a_n)) - F(z(a_0)) \quad (1.67)$$

$$= F(z(b)) - F(z(a)). \quad (1.68)$$

根据上面的结论很容易得到推论

**推论 1.2**

设  $\gamma$  为开集  $\Omega$  中的闭曲线,  $f$  在  $\Omega$  中连续, 且有原函数, 那么

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (1.69)$$



若不满足条件, 那么很容易找到积分不为 0 的函数, 比如  $f(z) = 1/z$  在单位圆周上的积分

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i \neq 0. \quad (1.70)$$

借助积分, 还可以得到如下结论.

**推论 1.3**

若  $f$  为区域  $\Omega$  中的全纯函数, 并且  $f' \equiv 0$ , 则  $f$  为常数.



**证明** 固定  $w_0 \in \Omega$ , 则对任意  $w \in \Omega$ , 对  $f'$  沿  $w_0$  到  $w$  积分可知  $f(w) = f(w_0)$ , 得证.

## 第 2 章 Cauchy 定理及其应用

本章主要讨论复分析中的 Cauchy 定理: 若  $f$  在开集  $\Omega$  中全纯,  $\gamma \subset \Omega$  是一个闭曲线, 则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (2.1)$$

复分析中许多理论, 包括留数在内都与这一事实有关. 在前一章中, 我们从原函数的角度对 Cauchy 定理已经有了初步认识, 下面开始正题.

### 2.1 Goursat 定理

上一章中证明了, 若  $f$  在开集  $\Omega$  中有原函数, 则对任意闭曲线  $\gamma \subset \Omega$  都有

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0, \quad (2.2)$$

反过来, 如果我们可以证明上述关系对于某些特定形状的曲线都存在, 那么原函数也存在. 我们从 Goursat 定理开始, 该定理可以为我们的推理提供帮助.

#### 定理 2.1 (Goursat 定理)

设开集  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , 三角形  $T$  及其内部都包含在  $\Omega$  中, 则对任意  $\Omega$  中的全纯函数, 都有

$$\int_T f(z)dz = 0. \quad (2.3)$$

**证明** 记给定的三角形为  $T^{(0)}$  (具有正定向), 其直径与周长记为  $d^{(0)}, p^{(0)}$ . 将三角形各边中点相连, 可以将  $T^{(0)}$  等分为 4 个三角形  $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}, T_4^{(1)}$ , 并且它们与  $T^{(0)}$  相似, 且均具有正定向, 如下图所示.

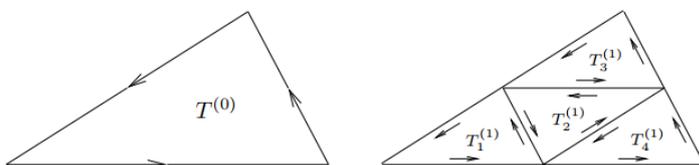


图 2.1: 三角形的划分

记  $T_j^{(1)} = T^{(1)}$ , 这里的  $T_j^{(1)}$  在四个三角形中对于  $f$  积分的模长最大, 则有

$$\int_{T^{(0)}} f(z)dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_3^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_4^{(1)}} f(z)dz \quad (2.4)$$

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{T^{(1)}} f(z)dz \right| \quad (2.5)$$

根据三角形的几何关系可得  $d^{(1)} = 2^{-1}d^{(0)}, p^{(1)} = 2^{-1}p^{(0)}$ . 重复上述过程, 可以得到三角形序列

$$T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(n)}, \dots \quad (2.6)$$

其中每个三角形相似, 直径与周长为  $d^{(n)} = 2^{-n}d^{(0)}, p^{(n)} = 2^{-n}p^{(0)}$ , 并且三角形的内部区域依次包含, 根据紧集套定理, 存在唯一  $z_0 \in \mathbb{C}$ , 对任意  $n$  都有  $z_0 \in T^{(n)}$  (这里  $T^{(n)}$  表示三角形  $T^{(n)}$  的内部), 由于  $f$  在  $\Omega$  全纯, 因此

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0) \quad (2.7)$$

其中  $\lim_{z \rightarrow z_0} \psi(z) = 0$ , 令  $\varepsilon_n = \sup_{z \in T^{(n)}} |\psi(z)|$ , 则有

$$\left| \int_{T^{(n)}} f(z)dz \right| = \left| \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0)dz \right| \leq \varepsilon_n d^{(n)} p^{(n)} \quad (2.8)$$

那么对于一开始的三角形  $T^{(0)}$  有估计

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \varepsilon_n d^{(0)} p_{(0)} \quad (2.9)$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , 命题得证.

根据 Goursat 定理可以得到

### 推论 2.1

设  $f$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数,  $\Omega$  包含一个矩形  $R$  及其内部, 则

$$\int_R f(z) dz = 0. \quad (2.10)$$

定理成立的原因在于矩形可以拆分为两个同定向的三角形.

## 2.2 圆盘上的 Cauchy 定理

下面讨论圆盘上的 Cauchy 定理, 首先证明如下引理

### 引理 2.1

设  $f$  为定义在开圆盘上的全纯函数, 则  $f$  有原函数.

**证明** 只需直接构造即可, 不妨设圆盘  $D$  以原点为圆心, 则对任意  $z \in D$ , 可以构造从原点到  $z$  的一条折线路径, 依次沿实轴与虚轴:  $0 \rightarrow \operatorname{Re}(z) \rightarrow z$ , 如下图所示.

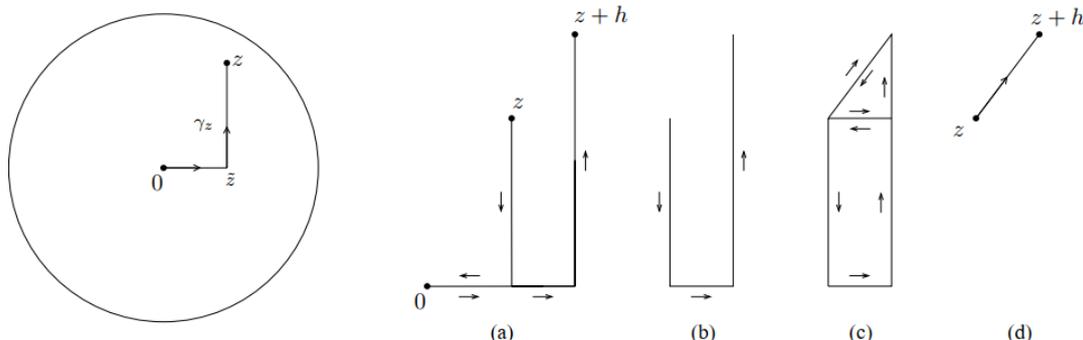


图 2.2: 路径与路径之差

记这样的路径为  $\gamma_z$ , 构造函数

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw, \quad (2.11)$$

下证  $F$  在  $D$  中全纯, 并且  $F'(z) = f(z)$ . 对任意  $z \in D$ , 都有

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w) dw - \int_{\gamma_z} f(w) dw \quad (2.12)$$

$$= \int_{\gamma_{z+h} - \gamma_z} f(w) dw \quad (2.13)$$

根据上图可知, 其中  $\gamma_{z+h} - \gamma_z = \eta$ ,  $\eta$  为连接  $z, z+h$  的有向线段, 故

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(w) dw \quad (2.14)$$

根据  $f$  的连续性可知  $f(w) = f(z) + \psi(w)$ , 其中  $\lim_{w \rightarrow z} \psi(w) = 0$ , 因此

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(z)dw + \int_{\eta} \psi(w)dw = f(z)h + \int_{\eta} \psi(w)dw \quad (2.15)$$

其中

$$\left| \int_{\eta} \psi(w)dw \right| \leq \sup_{w \in \eta} |\psi(w)| |h| = o(|h|) \quad (2.16)$$

故  $F'(z) = f(z)$ , 即  $F$  为  $f$  在圆盘上的原函数.

上面的引理表明, 任意全纯函数都有局部的原函数. 借助这种良好的性质, 仿照上一章中的证明, 可以立即得到圆盘上的 Cauchy 定理.

### 定理 2.2 (圆盘上的 Cauchy 定理)

若  $f$  为圆盘上的全纯函数, 则对于该圆盘内的任意闭曲线  $\gamma$ , 都有

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (2.17)$$

### 推论 2.2

若  $f$  为定义在一个开集  $\Omega$  上的全纯函数, 则对于任意  $\Omega$  中的圆周  $C$ , 若  $C$  内部均在  $\Omega$  中, 则

$$\int_C f(z)dz = 0. \quad (2.18)$$

**证明** 容易证明, 存在圆盘  $D$  使得  $C \subset D \subset \Omega$ , 因此  $f$  为  $D$  中的全纯函数,  $C$  为  $D$  中的曲线, 根据  $D$  中的 Cauchy 定理得证.

事实上, 对于任一闭曲线, 只要我们可以明确定义其内部, 就能同样构造折线路径证明原函数存在, 进而证明对应区域上的 Cauchy 定理, 圆周与圆盘则是最容易刻画例子之一. 对于那些“显然”可以定义内部的闭曲线, 称之为**简单围道** (toy contour)<sup>1</sup>, 并且定义其正定向为, 内部始终在左手边的方向. 许多常见闭曲线都是简单围道, 比如三角形、矩形、锁孔等, 因此可以说, 很容易证明简单围道的 Cauchy 定理成立.

虽然简单围道的 Cauchy 定理已经足够使用, 但关于 Cauchy 定理的问题并没有解决 (毕竟简单围道的定义并不严格), 严谨讨论这一问题需要用到 Jordan 曲线定理, 它表述为: 平面简单闭曲线可以将平面分为内部和外部 (各自作为一个连通分支), 借此可以刻画简单闭曲线的内部. 这是一个“显然”但不“易得”的定理, 因此对 Cauchy 定理的讨论仅止于此.

## 2.3 借助 Cauchy 定理计算积分

研究 Cauchy 定理的动机之一就是复分析方法计算实积分, 这里讨论一些简单的例子, 更系统的, 借助留数的讨论留到下一章.

**例 2.1** 考虑 Gauss 函数  $e^{-\pi x^2}$ , 它满足等式

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (2.19)$$

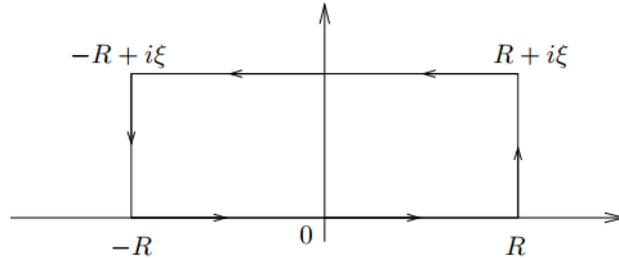
这说明它的 Fourier 变换仍然是自身, 下面我们借助围道积分推导这一事实. 需要用到结果

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx. \quad (2.20)$$

这一事实可以通过极坐标换元或 Gamma 函数得到.

令  $f(z) = e^{-\pi z^2}$ , 这是一个整函数, 并且在下图的矩形围道  $\gamma_R$  上全纯 (其中  $\xi > 0$  固定)

<sup>1</sup>Stein 的原文是 toy contour, contour 有围道的意思, 这里就按照“简单围道”表述了.

图 2.3: 矩形围道  $\gamma_R$ 

根据 Cauchy 定理,  $f$  在围道  $\gamma_R$  积分为 0. 如果将其拆分为每条边上的积分, 则在实轴部分的积分为

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx \quad (2.21)$$

当  $R \rightarrow \infty$  时, 上式收敛于 1. 考虑右边上的积分

$$I(R) = \int_0^\xi f(R + iy)idy = \int_0^\xi ie^{-\pi(R^2 + 2iRy - y^2)} dy \quad (2.22)$$

由于  $\xi$  固定, 因此  $|I(R)| \leq Ce^{-\pi R^2}$ , 这说明当  $R \rightarrow \infty$  时  $I(R) \rightarrow 0$ . 同理可得左边上的积分也有相同结果. 最后考虑上边的积分可得

$$\int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (2.23)$$

综上, 可得

$$0 = 1 - e^{-\pi\xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (2.24)$$

移项得证.

上面借助围道积分解决实积分问题的思想非常重要, 在许多地方都可以见到 (比如它可以解决许多含参变量积分问题).

**例 2.2** 另一个经典的例子是积分

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (2.25)$$

设  $f(z) = (1 - e^{iz})/z^2$ , 考虑  $f$  在如下围道上的积分

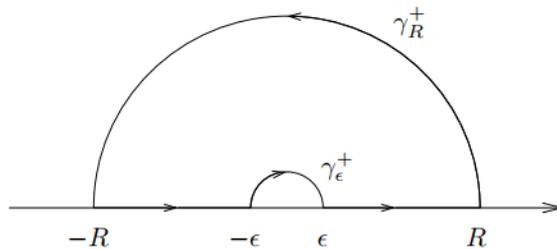


图 2.4: 环型围道

根据 Cauchy 定理可得

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz + \int_\epsilon^R \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\gamma_R^+} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz = 0 \quad (2.26)$$

由于

$$\left| \int_{\gamma_R^+} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz \right| \leq \int_{\gamma_R^+} \left| \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \right| dz \leq \int_{\gamma_R^+} \frac{2}{|z|^2} dz = \frac{2\pi}{R} \quad (2.27)$$

因此当  $R \rightarrow \infty$  时  $f$  在  $\gamma_R^+$  上的积分趋于 0, 这说明

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx = - \int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz \quad (2.28)$$

下面计算右侧的积分, 由于

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2} = -\frac{i}{z} + \frac{1 - \cos z}{z^2} + i \frac{z - \sin z}{z^2} = -\frac{i}{z} + E(z) \quad (2.29)$$

其中  $|E(z)|$  在  $z \rightarrow 0$  时有界, 因此

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon^+} E(z) dz \right| \leq \pi \varepsilon \sup_{z \in \gamma_\varepsilon^+} |E(z)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.30)$$

在  $\gamma_\varepsilon^+$  上有  $z = \varepsilon e^{i\theta}$ , 则

$$\int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz = \int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{-i}{z} dz + \int_{\gamma_\varepsilon^+} E(z) dz \rightarrow \int_\pi^0 (-i^2) d\theta = -\pi \quad (2.31)$$

对式 2.28 取实部可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \pi. \quad (2.32)$$

根据偶函数性质可得原等式.

## 2.4 Cauchy 积分公式

函数的积分表示在数学中有很重要的作用, 很多时候可以将局部性质与整体性质连接起来. 比如圆盘上稳态热方程 (实际上是位势方程) 的解就是其边值与 Poisson 核卷积的结果

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) u(1, \varphi) d\varphi. \quad (2.33)$$

这说明圆盘上的温度分布仅与边值有关, 对于全纯函数也有类似的性质, 因为根据 Cauchy-Riemann 方程, 全纯函数的实部与虚部都是调和函数. 在此我们讨论关于调和函数的一个积分表示, 上面的 Poisson 积分公式也可以看作是这种表示的推论.

### 定理 2.3 (Cauchy 积分公式)

设  $f$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数, 闭圆盘  $D \subset \Omega$ ,  $C = \partial D$  且具有正定向, 那么对任意  $z \in D$  都有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2.34)$$

**证明** 固定  $z \in D$ , 考虑包围  $z$  的锁孔围道  $\gamma_{\delta, \varepsilon} \subset \Omega$ , 如图所示

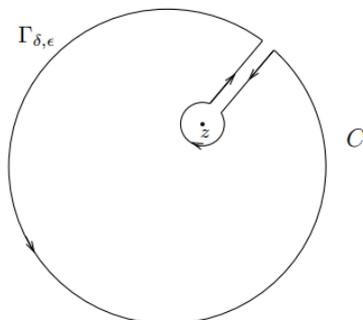


图 2.5: 锁孔围道

其中  $\delta, \varepsilon$  分别表示连接部分的宽度、内圆半径, 则根据 Cauchy 定理有

$$\int_{\gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta := \int_{\gamma_{\delta, \varepsilon}} F(\zeta) d\zeta = 0, \quad (2.35)$$

当  $\delta \rightarrow 0$  时, 由  $F$  的连续性可知上面在连接部分的积分值也会趋于 0, 剩余部分由一个内圆  $C_\varepsilon$  与一个外圆  $C$  构成. 由于

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{f(z)}{\zeta - z} \quad (2.36)$$

上面的第一部分有界 (根据  $F$  全纯), 因此当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 第一项的积分也趋于 0, 这说明

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{C_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -f(z) \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{-it}}{\varepsilon e^{-it}} dt = -2\pi i f(z) \quad (2.37)$$

由此可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2.38)$$

事实上, Cauchy 积分公式对满足相同条件的矩形  $R$  也成立, 甚至对许多简单围道都成立. 这实际上反映了一个几何上的规律: 如果将以  $z$  为圆心的圆周看作一圈橡皮筋, 那么  $f$  在对橡皮筋拉伸、收缩得到的新围道上的积分值与原来的圆周上是相同的 (这里仅考虑简单围道, 并且设  $f$  在足够大的区域内全纯).

作为 Cauchy 积分公式的推论, 可以得到如下定理

### 推论 2.3

设  $f$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数, 并且在  $\Omega$  上无穷阶可微, 圆周  $C = \partial D$  且有正定向, 则对任意  $C$  包围的圆盘内部的  $z$  都有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (2.39)$$

**证明** 归纳证明,  $n = 0$  时的情形就是 Cauchy 积分公式的内容, 假设命题对  $n - 1$  成立, 下面考虑  $n$  的情形. 根据假设有

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right] d\zeta \quad (2.40)$$

根据因式分解  $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + B^{n-1})$  可知

$$\frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right] = \frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} [A^{n-1} + \cdots + B^{n-1}] \quad (2.41)$$

$$= AB [A^{n-1} + \cdots + B^{n-1}] \quad (2.42)$$

$$= A^n B + A^{n-1} B^2 + \cdots + A^2 B^{n-1} + AB^n \quad (2.43)$$

当  $h \rightarrow 0$  时,  $A^k B^{n-k-1}$  与  $B^{n+1}$  会非常接近, 因此

$$f^{(n)}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \quad (2.44)$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (2.45)$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (2.46)$$

命题得证.

**注** 有时候, Cauchy 积分公式指上述推论的一般形式 (这自然包含了  $n = 0$  的形式).

根据一般情形的 Cauchy 积分公式也可以得到如下推论.

### 推论 2.4 (Cauchy 不等式)

若  $f$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数, 闭圆盘  $D_R(z_0) \subset \Omega$ , 设  $C = \partial D_R(z_0)$ , 则

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \|f\|_C}{R^n} \quad (2.47)$$

其中  $\|f\|_C = \sup_{z \in C} |f(z)|$ , 表示  $|f|$  在圆周  $C$  上的上确界.

**证明** 根据 Cauchy 积分公式可得

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \quad (2.48)$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^{n+1}} Re^{i\theta} d\theta \right| \quad (2.49)$$

$$\leq \frac{n! \|f\|_C}{2\pi R^n} 2\pi = \frac{n! \|f\|_C}{R^n}. \quad (2.50)$$

在第一章中, 我们讨论了(复)幂级数的美好性质, 并且证明了幂级数一定是收敛半径内的全纯函数, 借助 Cauchy 定理, 可以说明反过来的结论也成立.

#### 定理 2.4

设  $f$  为开集  $\Omega$  中的全纯函数, 以  $z_0$  为圆心的开圆盘  $D \subset \Omega$ , 则  $f$  在  $z_0$  处有幂级数展开, 对任意  $z \in D$  有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.51)$$

其中  $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!, n \geq 0$ .



**证明** 固定  $z \in D$ ,  $C = \partial D$ , 根据 Cauchy 积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.52)$$

并且其中

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \quad (2.53)$$

由于  $z \in D$  固定并且  $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ , 因此存在  $0 < r < 1$  使得  $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < r$ , 因此

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \quad (2.54)$$

并且级数对  $\zeta$  绝对一致收敛, 因此可以交换积分与求和号, 即得

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n \quad (2.55)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (2.56)$$

上面的定理说明全纯函数在一点局部必有幂级数展开, 而幂级数具有无穷可微的性质, 因此我们实际上证明了, 若  $f$  在一点全纯, 则  $f$  在该点无穷可微. 并且对于足够大的圆盘  $D(z_0) \subset \Omega$  都有幂级数展开, 特别当  $f$  为整函数时 (在  $\mathbb{C}$  全纯),  $f$  在 0 附近有幂级数展开  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , 并且在  $\mathbb{C}$  上收敛.

#### 推论 2.5 (Liouville 定理)

若  $f$  为有界整函数, 则  $f$  为常数.



**证明** 只要证明  $f' \equiv 0$  即可, 设  $\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = B < \infty$ , 对任意  $z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$ , 根据 Cauchy 不等式有

$$|f'(z_0)| \leq \frac{B}{R} \quad (2.57)$$

令  $R \rightarrow \infty$  得证.

Liouville 定理也是调和函数的重要结论.

借助 Cauchy 积分公式, 可以证明代数中的重要定理: 代数基本定理.

**推论 2.6 (代数基本定理)**

任何非常数复系数多项式  $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$  在  $\mathbb{C}$  中有一个根.



**证明** 假设  $P$  在  $\mathbb{C}$  中无根. 对任意  $z \neq 0$  有

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left( \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right) \quad (2.58)$$

由于当  $|z| \rightarrow \infty$  时, 括号中均趋于 0, 因此存在  $R > 0$ ,  $c = |a_n|/2$ , 使得对任意  $|z| > R$  都有

$$|P(z)| \geq c|z|^n, \quad \left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{1}{c|z|^n} \quad (2.59)$$

这说明  $1/P$  在  $|z| > R$  有界, 并且显然  $1/P$  在  $|z| \leq R$  有界 (有限处  $P$  无零点), 因此  $1/P$  为有界整函数, 根据 Liouville 定理可知  $1/P$  为常数, 即  $P$  为常值多项式, 与条件矛盾, 命题得证.

代数基本定理使得  $\mathbb{C}$  中的多项式可以因式分解.

**推论 2.7**

任何  $n$  次复系数多项式  $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$  在  $\mathbb{C}$  中都有  $n$  个根 (记重数), 若记为  $w_1, \cdots, w_n$ , 则

$$P(z) = a_n(z - w_1) \cdots (z - w_n). \quad (2.60)$$



**证明** 根据代数基本定理,  $P$  存在根  $w_1 \in \mathbb{C}$ , 拆分  $z = (z - w_1) + w_1$ , 则多项式  $P$  可写为

$$P(z) = b_n(z - w_1)^n + \cdots + b_1(z - w_1) + b_0 \quad (2.61)$$

根据  $P(w_1) = 0$  可知  $b_0 = 0$ , 因此  $P(z) = (z - w_1)Q(z)$ , 其中  $Q$  为  $n - 1$  次复系数多项式, 充分上述过程易证.

最后讨论全纯函数的另一个有趣性质, 它说明全纯函数具有“刚性”, 只需要局部的值就能唯一确定更大范围上的取值.

**引理 2.2**

设  $f$  为区域  $\Omega$  中的全纯函数, 并且存在有极限点的数列  $\{z_n\} \subset \Omega$ , 使得对任意  $n \in \mathbb{N}$  都有  $f(z_n) = 0$ , 则在  $\Omega$  上  $f \equiv 0$ .



证明分为两步, 首先证明在命题在  $\Omega$  的某个圆盘中成立, 然后再推广到整个  $\Omega$ .

**证明** 设点列  $\{w_k\} \subset \Omega$ ,  $z_0$  为  $\{w_k\}$  的一个极限点,  $D \subset \Omega$  为以  $z_0$  为圆心的圆盘, 考虑  $f$  在  $D$  中的幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (2.62)$$

若  $f$  在  $D$  不全为 0, 则存在最小的正整数  $m$ , 使得

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m(1 + g(z - z_0)) \quad (2.63)$$

这里  $g(0) = 0$ , 取  $\{w_k\}$  中收敛到  $z_0$  的子列 (不妨设为它本身), 则  $a_m(w_k - z_0)^m \neq 0$ , 并且存在充分大的  $k$  使得  $1 + g(w_k - z_0) \neq 0$ , 这与  $f(w_k) = 0$  矛盾, 故  $f$  在  $D$  上恒为 0.

下面向  $\Omega$  上推广, 设

$$U = \text{Int}\{z \in \Omega : f(z) = 0\}, \quad (2.64)$$

则显然  $f$  为非空开集 (因为  $z_0 \in U$ ), 但同时  $U$  也为闭集 (极限点封闭), 令  $V$  为  $U$  在  $\Omega$  中的补集, 则  $\Omega = U \cup V$ , 其中  $U, V$  无交, 且均同时为开集、闭集, 这与  $\Omega$  的连通性矛盾, 故  $V = \emptyset, U = \Omega$ , 得证.

根据上面的结论可以得到如下推论.

**定理 2.5 (唯一性定理)**

设  $f, g$  为区域  $\Omega$  中的全纯函数, 若对任意  $z \in U \subset \Omega$  (或者说对于某个有极限点的点列) 都有  $f(z) = g(z)$ , 其中  $U$  为非空开集, 则对任意  $z \in \Omega$  都有  $f(z) = g(z)$ .



对于全纯函数  $f, F$  分别定义在  $\Omega \subset \Omega'$  上, 若对任意  $z \in \Omega$  都有  $f(z) = F(z)$ , 那么  $F$  就称为  $f$  到  $\Omega'$  的**解析延拓**, 并且上面的事实说明, 这种解析延拓的结果是唯一的, 即  $F$  仅由  $f$  决定.

从解析延拓的角度看, 第一章中由幂级数定义指数函数、三角函数都是合理的, 它们都可以看作实直线上函数在复平面上的解析延拓.

## 2.5 更多的应用

下面讨论 Cauchy 定理以及 Cauchy 积分公式的更多应用

### 2.5.1 Morera 定理

首先讨论 Morera 定理, 它是 Cauchy 定理 (或者说 Goursat 定理) 的逆定理.

**定理 2.6 (Morera 定理)**

设  $f$  为开圆盘  $D$  上的连续函数, 对任意三角形  $T \subset D$  都有

$$\int_T f(z) dz = 0, \quad (2.65)$$

则  $f$  在  $D$  中全纯.



**证明** 借助 2.1 的证明可知  $f$  在  $D$  中存在原函数  $F$ ,  $F$  全纯意味着  $F$  为无穷次可微, 因此  $f$  为全纯的.

### 2.5.2 全纯函数列

数学分析中我们讨论过函数列以及函数项级数, 对于复分析也有类似的讨论, 不过  $\mathbb{C}$  的良好性质使得难度大大简化.

**定理 2.7**

设  $\{f_n\}$  为定义在  $\Omega$  上的全纯函数列, 并且在  $\Omega$  上一致收敛到  $f$ , 则  $f$  为任意紧集  $K \subset \Omega$  上的全纯函数, 进而  $f$  在  $\Omega$  全纯.



**证明** 设闭圆盘  $D \subset \Omega$ ,  $T$  为  $D$  中的三角形, 由于  $\{f_n\}$  全纯, 由此 Goursat 定理保证对任意  $n \in \mathbb{N}$  都有

$$\int_T f_n(z) dz = 0 \quad (2.66)$$

$\{f_n\}$  的一致收敛性可知  $f$  连续, 并且交换积分与极限可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n(z) dz = \int_T f(z) dz = 0 \quad (2.67)$$

则根据 Morera 定理可得  $f$  为  $D$  中的全纯函数. 根据  $D$  的任意性可知  $f$  在  $K \subset \Omega$  中全纯 (或者根据有限覆盖定理).

对于  $\mathbb{R}$  上的函数, 连续函数的一致极限是连续函数, 但可微函数列的一致极限却未必可微. 即使  $f \Rightarrow g$ , 也未必有  $f' \Rightarrow g'$ . 但复平面上的全纯函数却具有这种良好的性质, 下面讨论全纯函数列微分的极限.

**定理 2.8**

设  $\{f_n\}$  为定义在  $\Omega$  上的全纯函数列, 并且在  $\Omega$  上一致收敛到  $f$ , 则其导函数列  $\{f'_n\}$  也在任一紧集  $K \subset \Omega$  上一致收敛于  $f'$  (也即内闭一致收敛到  $f'$ ).



**证明** 设  $\Omega_r = \{z \in \Omega : \overline{D_r(z)} \subset \Omega\}$ , 则只需证明对任意  $r > 0$ , 在  $\Omega_r$  中  $f'_n \rightrightarrows f'$ . 根据 Cauchy 积分公式可得

$$|f'(z) - f'_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z)} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \quad (2.68)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in C_r(z)} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \frac{1}{r^2} 2\pi r \quad (2.69)$$

$$= \frac{1}{r} \|f - f_n\|_{C_r(z)} \quad (2.70)$$

两边对  $z \in \Omega_r$  取上确界, 当  $n$  充分大时  $\|f - f_n\|_{C_r(z)} < r\varepsilon$ , 这说明

$$\sup_{z \in \Omega_r} |f'(z) - f'_n(z)| < \varepsilon. \quad (2.71)$$

得证.

在上述定理的基础上, 可以证明  $f_n^{(k)}$  一致收敛到  $f^{(k)}$ .

同理, 可以考虑全纯函数项级数

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad (2.72)$$

许多函数都有这种级数形式 (比如幂级数), 包括后面章节会讨论的 Riemann  $\zeta$  函数.

### 2.5.3 根据积分定义的全纯函数

后面也会看到, 除了级数定义, 也有很多函数通过积分定义, 有形式

$$f(z) = \int_a^b F(z, s) ds. \quad (2.73)$$

其中  $F$  定义在  $\Omega \times [a, b] \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  中, 并且关于第一个变量全纯, 第二个变量连续, 积分按照 Riemann 积分意义考虑. 一个重要的问题就是讨论  $f$  是否全纯. 不失一般性, 设  $[a, b] = [0, 1]$ .

#### 定理 2.9

设  $F(z, s)$  定义在  $\Omega \times [0, 1]$  上,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  为开集, 若  $F$  满足

1. 对每个  $s \in [0, 1]$ ,  $F(z, s)$  关于  $z$  全纯.
2.  $F$  在  $\Omega \times [0, 1]$  连续.

则函数

$$f(z) = \int_0^1 F(z, s) ds \quad (2.74)$$

是  $\Omega$  上的全纯函数. ♥

只需要证明  $f$  在任意闭圆盘  $D \subset \Omega$  中全纯. 由于  $F$  连续, 因此只要证明对任意三角形  $T \subset D$  都有

$$\int_T \int_0^1 F(z, s) ds dz = 0, \quad (2.75)$$

则根据 Morera 定理可知  $f$  全纯, 这只需要讨论上面两个积分号的交换性, 我们需要借助级数工具.

**证明** 对任意  $n \geq 1$ , 考虑黎曼和 (同时也是  $\Omega$  中的全纯函数)

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(z, k/n) \quad (2.76)$$

下面证明  $\{f_n\}$  在圆盘  $D \subset \Omega$  中一致收敛到  $f$ . 对任意  $\varepsilon > 0$ , 根据  $F$  在紧集  $D \times [0, 1]$  上的一致连续性可知存在  $\delta > 0$ , 对任意  $|s_1 - s_2| < \delta$  都有

$$\sup_{z \in D} |F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \varepsilon. \quad (2.77)$$

若  $1/n < \delta$ , 则对任意  $z \in D$  有

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} F(z, k/n) - F(z, s) \right| \quad (2.78)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} |F(z, k/n) - F(z, s)| ds \quad (2.79)$$

$$< \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \quad (2.80)$$

这说明在  $D$  中  $f_n \Rightarrow f$ , 即  $f$  在  $D$  中全纯, 进而在  $\Omega$  中全纯.

## 2.5.4 Schwarz 反射原理

很多时候, 我们需要将一个函数延拓到更大的区域上, 有许多延拓方法可以保持连续性, 甚至更好的光滑性, 很多时候要保证的条件越多, 延拓的方法也会越复杂, 但对于全纯函数却不然, 一方面, 全纯函数在定义域内无穷阶可微性, 还有某种“刚性”保证了延拓的唯一性, 但另一方面, 有的全纯函数只能在某个区域中存在, 不能做解析延拓 (比如  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ , 不能从单位圆盘向外延拓).

根据本章中讨论的内容, 可以给出一个非常有用的延拓方法: Schwarz 反射原理. 首先定义这种延拓, 然后验证延拓后的函数依然是全纯的.

设  $\Omega \subset \mathbb{C}$  为开集, 并且关于实轴对称, 也就是说  $z \in \Omega$  当且仅当  $\bar{z} \in \Omega$ , 如下图所示.

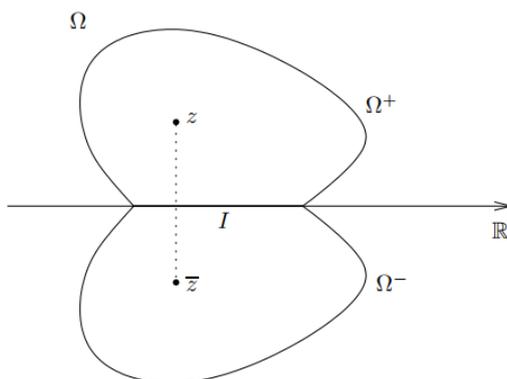


图 2.6: 对称区域  $\Omega$

设  $I = \Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$  为  $\Omega$  中的实轴部分, 在实轴上方与下方的区域设为  $\Omega^+, \Omega^-$ , 这实际上给出了  $\Omega$  的一个划分, 即

$$\Omega = \Omega^+ \sqcup I \sqcup \Omega^- \quad (2.81)$$

在此基础上, 可以得到一个有趣的结论.

### 引理 2.3 (对称引理)

设  $\Omega$  如上所述,  $f^+, f^-$  分别在  $\Omega^+, \Omega^-$  中全纯, 并且在  $I$  连续, 以及对任意  $x \in I$  都有  $f^+(x) = f^-(x)$ , 则下面定义的函数是  $\Omega$  上的全纯函数

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z), & z \in \Omega^+ \\ f^+(z) = f^-(z), & z \in I \\ f^-(z), & z \in \Omega^- \end{cases} \quad (2.82)$$



**证明** 显然  $f$  在  $\Omega$  上连续, 并且只需证明  $f$  在  $I$  中每一点全纯. 设  $D$  为以  $I$  上某点为心的圆盘, 则对任意  $D$  中

的三角形  $T$ , 都有

$$\int_T f(z) dz = 0 \quad (2.83)$$

因此根据 Morera 定理可知  $f$  在  $D$  中全纯. 上面的结果需要一些补充, 若  $T$  完全处于上半平面或下半平面,

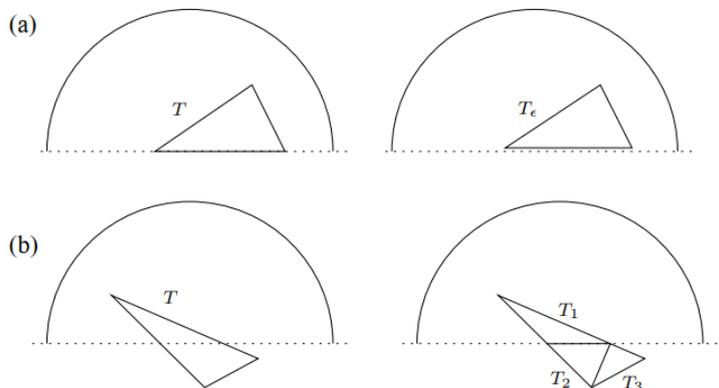


图 2.7: 三角形  $T$  的情况

则根据  $f^+, f^-$  的全纯性易得; 若  $T$  有一条边在  $I$  中, 则取完全处于对应部分的三角形  $T_\epsilon \sim T$ ,  $\epsilon$  表示底边与  $I$  的距离, 根据连续性, 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 可得上面的积分为 0; 当三角形横跨  $I$  时, 只需将其分割, 对每个三角形重复上述讨论即可.

借助上述原理, 可以讨论下面的命题.

#### 定理 2.10 (Schwarz 反射原理)

设  $\Omega$  同上,  $f$  在  $\Omega^+$  中全纯, 在  $I$  中取实值并连续, 则  $F$  可以延拓为一个  $\Omega$  中的全纯函数  $F$ , 即在  $\Omega^+$  中有  $F = f$ .

**证明** 为了保证  $I$  上的取值相同以及连续性, 可以定义对任意  $z \in \Omega^-$  有

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad (2.84)$$

只需证明这样延拓的  $F$  满足条件. 设  $z, z_0 \in \Omega^-$ , 则  $\bar{z}, \bar{z}_0 \in \Omega^+$ , 设  $f$  在  $\bar{z}_0$  附近的幂级数为

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n, \quad (2.85)$$

则根据  $F$  的构造有

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (z - z_0)^n \quad (2.86)$$

这说明  $F$  在  $\Omega^-$  中全纯, 而在实轴上有  $\overline{f(x)} = f(x)$ , 根据前面的对称引理可知  $F$  在  $I$  中全纯, 得证. 特别的, 根据唯一性定理可知这种延拓是唯一的.

### 2.5.5 Runge 逼近定理

Weierstrass 逼近定理说明任何闭区间上的连续函数都可以被多项式一致逼近, 我们自然会思考  $\mathbb{C}$  中的函数是否有类似的性质, 或者说, 满足何种条件的紧集  $K \subset \mathbb{C}$ , 使得其上的全纯函数都可以被复多项式一致逼近?

其实这个问题早已有了进展, 因为全纯函数可以在某点附近作幂级数展开, 因此只需要取幂级数的部分和就可以得到一个一致逼近序列. 但问题并没有结束, 比如考虑单位圆周上的函数  $f(z) = z^{-1}$ , 假设存在多项式一致逼近  $z^{-1}$ , 则这些多项式在  $C$  上的积分均为 0, 因此它们的一致极限也为 0, 但由于

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \quad (2.87)$$

因此出现了矛盾. 这说明我们需要对  $K$  作进一步的限制, 比如考虑上面的例子, 就可以给出一个拓扑角度上的限制条件:  $K^c$  必须连通. 反之,  $K^c$  连通必有一致逼近存在则由下面的 Runge 定理给出. 事实上, Runge 定理还说明对上面这种反例可以通过在  $K^c$  中有奇点的有理函数逼近 (这里的奇点指非全纯点).

### 定理 2.11 (Runge 逼近定理)

设  $K \subset \mathbb{C}$  为紧集,  $f$  为在  $K$  的某个邻域上的全纯函数, 则  $f$  可以被在  $K^c$  中有奇点的有理函数逼近; 若  $K^c$  连通, 则  $f$  可以被多项式函数一致逼近.

事实上, 若  $K^c$  连通, 则奇点可以变为无穷远点 (最后讨论这件事), 这时有理函数就会变为多项式, 即得到了后一部分的结论. 下面讨论定理的证明, 首先考虑如下引理.

### 引理 2.4

设  $f$  为开集  $\Omega \subset \mathbb{C}$  中的全纯函数,  $K \subset \Omega$  为紧集, 则对任意  $z \in K$ , 存在有限多曲线  $\gamma_1, \dots, \gamma_N \subset \Omega - K$  使得

$$f(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.88)$$

**证明** 设  $d = c \cdot d(K, \Omega^c)$ , 这里  $c < 1/\sqrt{2}$  为常数, 则考虑边长  $d$  的矩形网格, 设  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_M\}$  表示与  $K$  有交的有限矩形 (具有正定向),  $\partial Q_m$  表示每个矩形的边界, 设  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  表示处于边界的矩形的边, 则根据一开始  $d$  的选择可知这些边仍然在  $\Omega$  中 (同样借助一开始  $d$  的选择可以使得每个  $\gamma_k$  都与  $K$  无交), 如下图所示

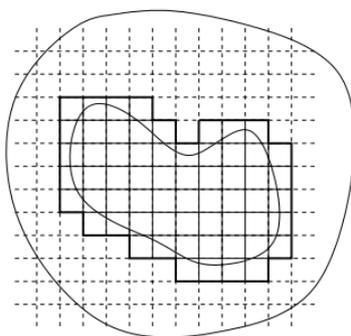


图 2.8: 网格与  $\gamma$  的选择

对任意  $z \in K$ , 都存在  $Q_j \in \mathcal{Q}$  使得  $z \in Q_j$ , 因此根据 Cauchy 公式有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \delta_{kj} f(z) \quad (2.89)$$

$\delta_{kl}$  为 Kronecker 符号, 由于处于内部的矩形边界上的积分会抵消, 因此

$$f(z) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.90)$$

这里  $\gamma_1, \dots, \gamma_N \subset \Omega - K$ , 得证.

Runge 逼近定理的第一部分由下面的引理推出.

### 引理 2.5

对任意曲线  $\gamma \subset \Omega - K$ , 存在一列在  $\gamma$  上有奇点的有理函数, 它们在  $K$  上一致逼近积分

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K. \quad (2.91)$$

**证明** 设  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  是一个参数曲线, 则

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt := \int_0^1 F(z, t) dt \quad (2.92)$$

由于  $\gamma$  与  $K$  无交, 函数  $F$  在  $K \times [0, 1]$  连续 (紧集使之一致连续), 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 对任意  $|t_1 - t_2| < \delta$  都有

$$\sup_{z \in K} |F(z, t_1) - F(z, t_2)| < \varepsilon \quad (2.93)$$

仿照定理 2.9 的证明可知, 的 Riemann 和

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(z, k/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\gamma(k/n))}{\gamma(k/n) - z} \quad (2.94)$$

一致逼近  $g$ , 并且都是有理函数, 得证.

最后补充前面的一个细节, 即将奇点变为无穷远点的过程. 注意到, 以  $z_0$  为唯一奇点的有理函数一定是  $1/(z - z_0)$  的多项式, 因此只需要考虑这种情况即可.

### 引理 2.6

设  $K^c$  连通,  $z_0 \notin K$ , 则函数  $1/(z - z_0)$  在  $K$  中可以被多项式一致逼近.



**证明** 设  $D$  为以原点为圆心的圆盘, 并且包含  $K$ , 取  $D$  外一点  $z_1$ , 则对任意  $z \in K$  有

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1 - z/z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}} \quad (2.95)$$

上面的级数在  $K$  中一致收敛, 并且取部分和就能得到  $1/(z - z_1)$  在  $\Omega$  上的一致逼近, 这也说明了  $1/(z - z_1)^k$  也能被一致逼近.

下面证明,  $1/(z - z_0)$  可以被  $1/(z - z_1)$  的多项式一致逼近. 由于  $K^c$  连通, 因此设  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$ , 令  $\rho = \frac{1}{2}d(K, \gamma) > 0$ , 取点列  $\{w_1, \dots, w_l\} \subset \gamma$ , 其中  $w_0 = z_0, w_l = z_1$ , 并且对任意  $0 \leq j < l$  都有  $|w_j - w_{j+1}| < \rho$ .

下证对任意  $w, w' \in \gamma, |w - w'| < \rho$ ,  $1/(z - w)$  可以被  $1/(z - w')$  的多项式在  $K$  上一致逼近, 事实上

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - w'} \frac{1}{1 - \frac{w - w'}{z - w'}} \quad (2.96)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - w')^n}{(z - w')^{n+1}} \quad (2.97)$$

根据上述结论, 借助序列  $w_1, \dots, w_l$  可知  $1/(z - z_0)$  可以被  $1/(z - z_1)$  一致逼近, 得证.

上述“可由  $A$  逼近  $B$ , 由  $B$  逼近  $C$ , 因此能由  $A$  逼近  $C$ ”并不显然, 可以写写看.

## 第3章 亚纯函数与对数

本节讨论亚纯函数以及其可能存在的(孤立)奇点.

### 定义 3.1 (孤立奇点)

称  $z_0 \in \mathbb{C}$  为函数  $f$  的孤立奇点, 若  $f$  在  $z_0$  的一个去心邻域中全纯, 但在  $z_0$  处不全纯.

奇点有很多类型, 其中最简单的一种是**可去奇点**, 即若  $f$  在  $z_0$  处能补充定义

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad (3.1)$$

并且补充定义后的函数在  $z_0$  的邻域中全纯, 则  $z_0$  的奇性并没有实质性的影响. 举例定义在穿孔平面  $\mathbb{C} - \{0\}$  上的函数  $f(z) = z$ , 这时  $z = 0$  就是  $f$  的可去奇点.

同样考虑穿孔平面以及定义在其上的函数  $g(z) = 1/z$ , 可知

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \infty, \quad (3.2)$$

这种奇点就被称为**极点**.

再来考虑穿孔平面以及定义在其上的函数  $h(z) = e^{1/z}$ , 当  $z$  沿实正半轴趋于 0 时  $h(z) \rightarrow \infty$ , 当  $z$  沿实负半轴趋于 0 时  $h(z) \rightarrow 0$ , 因此  $h$  在 0 处极限不存在, 这种奇点就被称为**本性奇点**.

上面的例子涵盖了孤立奇点的三种类型:

- 可去奇点:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq \infty$ .
- 极点:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .
- 本性奇点:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  不存在.

许多时候奇点与零点相关, 因此从零点开始.

### 3.1 零点与极点

称  $z_0$  为函数  $f \neq 0$  的零点, 若  $f(z_0) = 0$ . 如设  $f$  为  $\Omega$  上的全纯函数, 则  $f$  的解析性保证了它的零点都是孤立的, 也就是说, 若  $f(z_0) = 0$ , 则存在  $z_0$  的一个邻域  $U \subset \Omega$ , 使得  $f$  在  $U - \{z_0\}$  上不为 0.

#### 定理 3.1

设  $f$  在连通开集  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上全纯且不恒为 0, 并且有零点  $z_0 \in \Omega$ , 则存在  $z_0$  的邻域  $U \subset \Omega$ , 在  $U$  中无零点的全纯函数  $g$  以及唯一的  $n \in \mathbb{N}$  使得

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad \forall z \in U. \quad (3.3)$$

**证明** 取  $z_0$  的邻域  $U \subset \Omega$ , 并设  $f$  在  $U$  中仅  $z_0$  处为 0, 则根据  $f$  全纯可知  $f$  在  $z_0$  处有幂级数展开

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (3.4)$$

由于  $f \neq 0$ , 因此存在最小的  $n \in \mathbb{N}$  使得  $a_n \neq 0$ , 而  $a_0 = 0$ , 因此

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k = (z - z_0)^n g(z) \quad (3.5)$$

其中  $g$  满足命题要求. 进一步根据  $n$  的最小性可知其唯一性.

延续上述定理的记号, 称  $z_0$  为  $f$  的  $n$  阶零点 (或  $n$  重零点), 阶为 1 的零点称为简单零点.

零点与极点直接有非常密切的联系, 一句话概括就是

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty \quad (3.6)$$

更具体而言, 若  $z_0$  是函数  $f$  的零点, 则对应就是函数  $1/f$  的极点, 反之亦然, 因此前面的定理有下面这个形式上对称的定理.

**定理 3.2**

设  $f$  在  $z_0 \in \Omega$  处有极点, 则存在  $z_0$  的邻域  $U$ , 在  $U$  中不为 0 的全纯函数  $h$  以及唯一的  $n \in \mathbb{N}$  使得

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z), \quad \forall z \in U. \quad (3.7)$$

**证明** 根据前一定理, 可设  $1/f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ , 其中  $g$  在  $z_0$  的某一邻域中不为零, 因此取  $h(z) = 1/g(z)$ , 就有

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z), \quad (3.8)$$

命题得证.

同样延续上述定理的记号, 称  $z_0$  为  $f$  的  $n$  阶极点 (或  $n$  重极点), 阶为 1 的极点称为简单极点.

**推论 3.1**

设  $z_0$  为  $f$  的  $n$  重极点, 则

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z), \quad (3.9)$$

其中  $G$  为  $z_0$  某个邻域中的全纯函数.

**证明** 利用上一定理, 将  $h$  在  $z_0$  处展开即得.

这一推论揭示了函数  $f$  极点的性态, 即  $f$  在  $n$  重极点附近可以表示为一个全纯函数与一个负幂多项式的和, 这两部分分别称为  $f$  在  $z_0$  附近的**全纯部分**与**主要部分**. 籍此, 可以定义复分析中的一个重要概念: **留数**.

**定义 3.2 (留数)**

设  $z_0$  为  $f$  的极点, 则称其在  $z_0$  处主要部分的系数  $a_{-1}$  为  $f$  在  $z_0$  处的留数, 记作

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}. \quad (3.10)$$

如设  $P(z)$  为  $f$  在  $z_0$  处的主要部分,  $C$  为以  $z_0$  为中心的圆周, 则有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C P(z) dz = a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0). \quad (3.11)$$

关于留数更多的性质留到下一节讨论, 这里最后给出一个计算极点的留数的一般公式.

**命题 3.1**

设  $z_0$  为  $f$  的  $n$  阶极点, 则

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z). \quad (3.12)$$

**证明** 由于

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + G(z)(z - z_0)^n \quad (3.13)$$

求导即得.

## 3.2 留数公式

下面进一步讨论留数, 过程与上一章讨论 Cauchy 积分公式类似: 先考虑圆周及其内部圆盘的情况, 而后推广到一般的简单围道及其内部.

**定理 3.3**

设  $f$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数, 圆周  $C$  及其内部的穿孔  $D - \{z_0\}$  在  $\Omega$  中, 则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0). \quad (3.14)$$



**证明** 利用锁孔围道避开极点  $z_0$ , 且使两线段距离趋于 0 可得

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_\varepsilon} f(z)dz, \quad (3.15)$$

其中  $C_\varepsilon$  是一个以  $z_0$  为圆心,  $\varepsilon$  为半径的圆周. 对常函数  $g = a_{-1}$  使用 Cauchy 积分公式可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz = a_{-1}, \quad (3.16)$$

类似的, 依次对常函数  $g = a_{-k}$  操作可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} dz = 0, \quad (3.17)$$

而在  $z_0$  的邻域中有

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z) \quad (3.18)$$

其中  $G$  全纯, 对两边积分即证.

上述定理证明的关键就是将圆周  $C$  变为圆周  $C_\varepsilon$ , 利用这种思路, 很容易可以将定理推广到多个极点的情况.

**推论 3.2**

设  $f$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数, 圆周  $C$  及其内部的穿孔  $D - \{z_1, \dots, z_N\}$  在  $\Omega$  中, 则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (3.19)$$



**证明** 采用多个锁孔围道, 将  $C$  变为  $C_{\varepsilon_1}, \dots, C_{\varepsilon_k}$ , 在其上依次重复前面的操作即证.

同样的, 这种思路也能推广到简单围道.

**推论 3.3 (留数公式)**

设  $f$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数, 简单围道  $\gamma$  及其内部的穿孔  $D - \{z_1, \dots, z_N\}$  在  $\Omega$  中, 则

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (3.20)$$

**3.2.1 一些例子**

留数公式为积分的计算 (特别是某些实积分) 提供了极大的便利. 下面考虑一些形如

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (3.21)$$

的例子, 其基本思路都是通过一组围道  $\gamma_R$  将积分扩展到复平面, 对  $R$  取极限即得结果

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \quad (3.22)$$

其中每个积分  $\int_{\gamma_R}$  可以借助留数公式解决, 因此重点就在于选取合适的围道.

**例 3.1 证明**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \quad (3.23)$$

由于  $(\arctan(x))' = 1/(1+x^2)$ , 因此借助 N-L 公式很容易给出结果. 如果作换元  $x \mapsto x/y$ , 则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{y^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x) dx \quad (3.24)$$

因此这也可以看作平面上 Poisson 核的归一化问题.

考虑上半平面  $\mathbb{C}^+ - \{i\}$  上的全纯函数

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}, \quad (3.25)$$

由于  $i$  均为  $f$  的一阶极点, 计算可得

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{2i}, \quad (3.26)$$

作半圆围道  $\gamma_R$ , 由留数公式可得

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \quad (3.27)$$

并且  $f$  在圆周部分  $C_R^+$  上的积分有

$$\left| \int_{C_R^+} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{B}{R^2} \leq \frac{M}{R} \quad (3.28)$$

这是因为当  $z \in C_R^+$  时  $|f(z)| \leq B/|z|^2$ , 令  $R \rightarrow \infty$  得证.

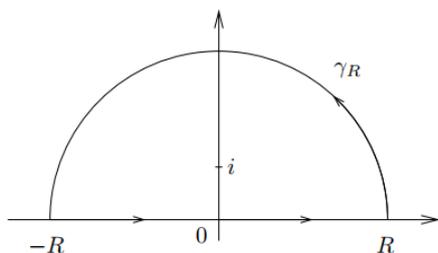


图 3.1: 半圆围道

**例 3.2** 证明对任意  $0 < a < 1$  有

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad (3.29)$$

考虑函数

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}, \quad (3.30)$$

其极点为  $(2k+1)\pi i$ , 考虑以  $\pi i$  为中心的矩形围道  $\gamma_R$

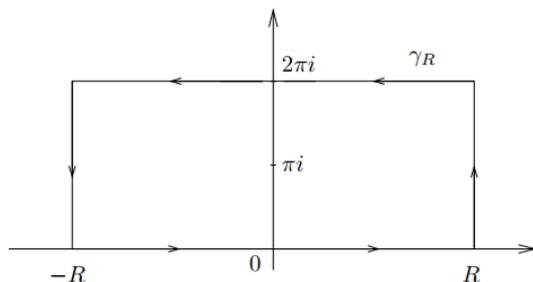


图 3.2: 矩形围道

根据留数公式有

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \pi i) \quad (3.31)$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow \pi i} e^{az} \frac{z - \pi i}{e^z - e^{\pi i}} \quad (3.32)$$

$$= -2\pi i e^{a\pi i} \quad (3.33)$$

再考虑各边的积分，记实轴部分的积分

$$I_R = \int_{-R}^R f(x) dx, \quad (3.34)$$

则上边积分为

$$\int_R^{-R} f(x + 2\pi i) dx = -e^{2\pi i a} I_R \quad (3.35)$$

记右边为  $A_R = \{R + it : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ，则

$$\left| \int_{A_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+it)}}{1 + e^{R+it}} \right| dt \leq C e^{(a-1)R} \quad (3.36)$$

由于  $a < 1$ ，因此当  $R \rightarrow \infty$  时上式趋于 0， $f$  在左边的积分同理，此时

$$I - e^{2\pi i a} I = -2\pi i e^{a\pi i} \quad (3.37)$$

$$I = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1 - e^{2\pi i a}} \quad (3.38)$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}} \quad (3.39)$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (3.40)$$

得证.

### 例 3.3 证明 Fourier 变换

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{\cosh \pi \xi}. \quad (3.41)$$

其中  $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$ .

上面的性质说明函数  $1/\cosh \pi x$  的 Fourier 变换就是自身，这与  $e^{-\pi x^2}$  的情形相同.

固定  $\xi \in \mathbb{R}$ ，考虑函数

$$f(z) = \frac{e^{-2\pi i z \xi}}{\cosh \pi z}, \quad (3.42)$$

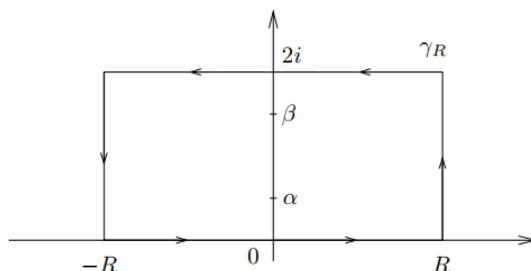


图 3.3: 矩形围道

它在与上例相同的矩形围道中的极点为  $\alpha = i/2, \beta = 3i/2$ . 计算留数可得 (注意  $\alpha = i/2$ )

$$\text{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} e^{-2\pi i z \xi} \frac{2(z - \alpha)}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} \quad (3.43)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \alpha} e^{-2\pi i z \xi + \pi z} \frac{2(z - \alpha)}{e^{2\pi z} - e^{2\pi \alpha}} \quad (3.44)$$

$$= 2e^{-2\pi i \alpha \xi + \pi \alpha} \frac{1}{2\pi e^{2\pi \alpha}} \quad (3.45)$$

$$= \frac{\pi i}{e^{\pi \xi}} \quad (3.46)$$

同理也有  $\text{Res}(f, \beta) = -e^{3\pi\xi}/(\pi i)$ , 因此

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}). \quad (3.47)$$

下面考虑各边上的积分, 设  $z = R + iy, 0 \leq y \leq 2$ , 则

$$|e^{-2\pi iz\xi}| = e^{2\pi y\xi} \leq e^{4\pi|\xi|} \quad (3.48)$$

$$|\cosh \pi z| = \left| \frac{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}{2} \right| \quad (3.49)$$

$$\geq \frac{1}{2} ||e^{\pi z}| - |e^{-\pi z}|| \quad (3.50)$$

$$\geq \frac{1}{2}(e^{\pi R} - e^{-\pi R}) \rightarrow \infty \quad (3.51)$$

这说明  $f$  在左右两边的积分在  $R \rightarrow \infty$  时趋于 0. 若设实轴部分积分为  $I_R$ , 则上边积分为  $-e^{4\pi\xi}I$ , 因此

$$I = \frac{2(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi})}{1 - e^{4\pi\xi}} = \frac{2(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi})}{e^{2\pi\xi} - e^{-2\pi\xi}} = \frac{2}{e^{\pi\xi} + e^{-\pi\xi}} = \frac{1}{\cosh \pi\xi}, \quad (3.52)$$

得证. 该命题还有一个推广形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} \frac{\sin \pi a}{\cosh \pi x + \cos \pi a} dx = \frac{2 \sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi}. \quad (3.53)$$

其中  $0 < a < 1$ , 前面证明的是  $a = 1/2$  的形式.

### 3.3 奇点与亚纯函数

在前面的小节中我们主要讨论了极点, 本节讨论其它两种奇点. 首先给出一个关于可去奇点的定理.

#### 定理 3.4 (Riemann 可去奇点定理)

设  $f$  在开集  $\Omega - \{z_0\}$  全纯, 在  $\Omega - \{z_0\}$  有界, 则  $z_0$  为可去奇点.



**证明** 由于奇点类型为局部性质, 因此可以考虑以  $z_0$  为圆心的圆盘  $D \subset \Omega$ ,  $C$  表示其边界, 考虑如图双锁孔围道

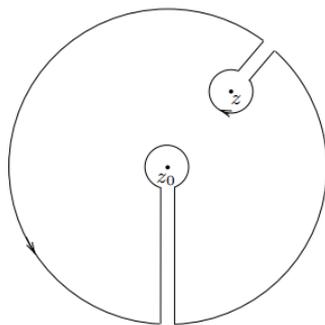


图 3.4: 双锁孔围道

根据 Cauchy 定理可知  $f(\zeta)/(\zeta - z)$  的积分满足

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (3.54)$$

其中  $\gamma_\epsilon, \gamma'_\epsilon$  分别为以  $z, z_0$  为圆心, 半径  $\epsilon$  的负定向圆周, 则

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -2\pi i f(z), \quad (3.55)$$

并且根据  $f$  的有界性可知

$$\left| \int_{\gamma'_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz \right| \leq C\varepsilon \quad (3.56)$$

因此令  $\varepsilon \rightarrow 0$  就有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.57)$$

上式对任意  $z \in D, z \neq z_0$  成立. 令  $\zeta = z_0 + Re^{2\pi is}$ , 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^1 \frac{f(z_0 + Re^{2\pi is})}{(z_0 + Re^{2\pi is}) - z} R s ds := \int_0^1 F(z, s) ds \quad (3.58)$$

对任意  $s$ ,  $F(z, s)$  关于  $z$  在  $D$  中全纯, 并且在  $D \times [0, 1]$  连续, 因此由该积分定义的函数在  $D$  上全纯, 并且它在  $D$  中所有  $z \neq z_0$  的点取值为  $f(z)$ , 这实际上给出了  $f$  的一个扩张, 即  $z_0$  为可去奇点.

借助 Riemann 定理, 可以给出一个关于极点的刻画, 它与函数在一点领域的性质有关.

#### 推论 3.4

设  $z_0$  为  $f$  的孤立奇点, 则  $z_0$  为极点当且仅当

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \quad (3.59)$$

**证明** 若  $z_0$  为极点, 结论显然成立. 反之若满足上述等式, 显然  $z_0$  不是本性奇点, 并且  $1/f$  在  $z_0$  附近有界, 故  $z_0$  为  $1/f$  的可去奇点, 而  $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/f(z) = 0$ , 因此  $z_0$  是  $1/f$  的零点, 也是  $f$  的极点.

最后讨论本性奇点, 除前两者外的奇点均称为本性奇点. 仿照对可去奇点、极点的讨论, 下述定理表明本性奇点也可由  $f$  的局部性质刻画.

#### 定理 3.5 (Casorati-Weierstrass 定理)

设  $f$  在穿孔圆盘  $D_r(z_0) - \{z_0\}$  全纯, 并且  $z_0$  为其本性奇点, 则  $D_r(z_0) - \{z_0\}$  在  $f$  下的像在  $\mathbb{C}$  中稠密. 

**证明** 若不然, 则存在  $w \in \mathbb{C}, \delta > 0$ , 使得对任意  $z \in D_r(z_0) - \{z_0\}$  都有

$$|f(z) - w| > \delta, \quad (3.60)$$

由此可定义  $D_r(z_0) - \{z_0\}$  上的函数

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \quad (3.61)$$

其模在穿孔圆盘上有界  $1/\delta$ , 由此根据 Riemann 定理,  $g$  在  $z_0$  处有可去奇点. 若  $g(z_0) \neq 0$ , 则  $f(z) - w$  在  $z_0$  处全纯, 与本性奇点矛盾; 若  $g(z_0) = 0$ , 则  $z_0$  是  $f(z) - w$  的极点, 也与本性奇点矛盾, 因此一开始的假定不成立, 得证.

在上述定理的假设下, Picard 给出过一个更强的版本, 称为 Picard 大定理, 指出对任意  $A \in \mathbb{C}$ ,  $f$  会无穷次取到  $A$ , 并且至多有一个例外值. 在此暂不讨论.

下面考虑一类仅有极点的函数, 称为亚纯函数.

#### 定义 3.3 (亚纯函数)

称  $f$  为开集  $\Omega$  中的亚纯函数, 若存在无极限点的点列  $\{z_0, z_1, \dots\} \subset \Omega$ , 使得

1.  $f$  的极点均在该点列中.
2.  $f$  在  $\Omega - \{z_0, z_1, \dots\}$  全纯.



设  $f$  在任意大圆盘都全纯, 则可以讨论无穷远点 (扩充复平面) 的奇性. 作变换  $F(z) = f(1/z)$ , 则此时  $F$  在原点附近的穿孔圆盘中全纯, 此时  $0$  为  $F$  的何种奇点, 则称  $\infty$  为  $f$  的何种奇点. 在此基础上, 称复平面中的亚纯函数  $f$  在扩充复平面亚纯, 若无穷远点是  $f$  的极点.

## 定理 3.6

扩充复平面上的亚纯函数是有理函数.



**证明** 设  $f$  为扩充复平面上的亚纯函数, 则  $0$  是  $f(1/z)$  的可去奇点或极点, 但不论如何  $f(1/z)$  都在原点的某个去心邻域上全纯, 这说明  $f$  仅有限个极点, 设为  $z_1, \dots, z_n$ . 下面的思路是将  $f$  的主要部分减去, 对每个  $z_k \in \mathbb{C}$  可分解

$$f(z) = f_k(z) + g_k(z), \quad (3.62)$$

其中  $f_k, g_k$  分别为  $f$  在  $z_k$  附近的主要、全纯部分, 特别地,  $f_k$  是关于  $1/(z - z_k)$  的多项式, 类似也有

$$f(1/z) = \tilde{f}_\infty(z) + \tilde{g}_\infty(z) \quad (3.63)$$

二者分别为  $f(1/z)$  在  $0$  附近的主要、全纯部分, 前者是  $1/z$  的多项式, 再令  $f_\infty(z) = \tilde{f}_\infty(1/z)$ . 由此可知函数

$$H = f - f_\infty - \sum_{k=1}^n f_k \quad (3.64)$$

是有界整函数 (因为每个  $z_k$  都是  $H$  的可去奇点), 根据 Liouville 定理可知  $H$  为常数, 因此  $f$  为有理函数.

## Riemann 球面

对于扩充复平面, 可以通过**球极投影**将其一一对应到一个球面上

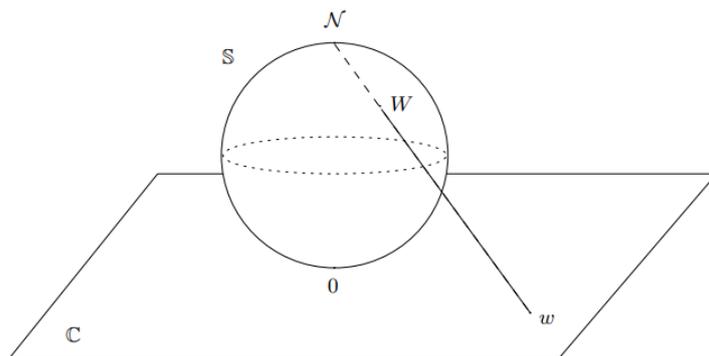


图 3.5: 球极投影

在三维直角坐标系中, 设  $xOy$  平面为复平面  $\mathbb{C}$ ,  $S^2$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 设北极点  $N = (0, 0, 1)$ , 则对任一点  $w \in \mathbb{C}$ , 其与  $N$  的连线 (只直线) 与球面交于异于  $N$  的唯一一点  $W$ , 由此可以建立一个对应

$$w \mapsto W \quad (3.65)$$

若设  $w = x + iy, W = (X, Y, Z)$ , 则通过计算可得

$$x = \frac{X}{1-Z}, \quad y = \frac{Y}{1-Z}, \quad (3.66)$$

以及

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Y = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \quad (3.67)$$

特别的,  $N$  恰好对应到无穷远点  $\infty$ , 如果仅考虑复平面, 也可得到  $S^2 - \{N\} \cong \mathbb{C}$ . 这时的球面  $S^2$  称为 **Riemann 球面**, 这时扩充复平面上的亚纯函数就可以看作  $S^2$  到自身的映射, 这时无穷远点变成了与其它点别无二致的北极点  $N$ . 总之, Riemann 球面给出了扩充复平面的一个同胚, 更直观展示了其几何结构.

### 3.4 辐角原理及应用

在正式定义复对数前, 先借助对数的概念讨论辐角原理. 复值函数  $f(z)$  的对数为

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z) \quad (3.68)$$

前者为一个关于模长的实值函数, 后者则由  $f$  的辐角决定, 辐角的多值性使得复对数是多值函数, 但不论如何, 其导数均为  $f'(z)/f(z)$ , 这是一个单值函数. 积分

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (3.69)$$

在  $z$  行遍  $\gamma$  时, 上面的积分体现了  $f$  的辐角的变化, 如果  $\gamma$  为闭曲线, 则辐角原理指出: 这种变化由  $\gamma$  内部的零点与极点完全决定.

计算可知

$$\frac{(\prod_{k=1}^N f_k)' }{\prod_{k=1}^N f_k} = \sum_{k=1}^N \frac{f_k'}{f_k} \quad (3.70)$$

设  $f$  全纯, 并且有  $n$  重零点  $z_0$ , 则令  $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ , 其中  $g$  在  $z_0$  的邻域内无零点, 则根据上述性质有

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n}{z - z_0} + G(z), \quad (3.71)$$

而  $G$  恰好是全纯函数, 故此时  $z_0$  恰好为  $f'/f$  的极点, 且留数为  $n$ . 类似的, 若设  $z_0$  为  $f$  的  $n$  重极点,  $f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$ , 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z - z_0} + H(z) \quad (3.72)$$

此时  $z_0$  恰好为  $f'/f$  的极点, 且留数为  $-n$ .

上面的分析指出,  $f$  的极点、零点恰好为  $f'/f$  的极点, 且在对应点的留数由极点/零点的类型与重数决定, 因此积分后, 根据留数定理可得如下结论

#### 定理 3.7 (辐角原理)

设  $f$  在一个包含圆周及其内部的开集  $\Omega$  亚纯, 则若  $f$  在  $C$  上无极点、零点, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \#\{C \text{ 中的零点}\} - \#\{C \text{ 中的极点}\} \quad (3.73)$$

其中零点、极点均记重数.

#### 推论 3.5

在前述定理条件的基础上, 设  $\varphi$  在  $\Omega$  全纯, 再设  $z_1, \dots, z_s; p_1, \dots, p_t$  为  $f$  的零点、极点 (记重数), 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^s \varphi(z_k) - \sum_{k=1}^t \varphi(p_k). \quad (3.74)$$

#### 推论 3.6

上述定理对简单围道同样成立.

下面考虑辐角原理的几个应用, 证明三个定理:

1. Rouché 原理: 全纯函数可以添加一个全纯微扰项, 使得在一定范围内的零点数量不变.
2. 开映射定理: 全纯函数可以将开集映到开集.
3. 最大模原理: 调和函数在某区域上的最大值只能在边界取到.

**定理 3.8 (Rouche 定理)**

设  $f, g$  在包含圆周  $C$  及其内部的开集  $\Omega$  亚纯, 并且对任意  $z \in C$  都有  $|f(z)| > |g(z)|$ , 则  $f, f+g$  在  $C$  内部有相同数量的零点.



**证明** 设  $t \in [0, 1]$ , 定义  $f_t(z) = f(z) + tg(z)$ , 则有  $f_0 = f, f_1 = f + g$ , 设  $n_t$  表示函数  $f_t$  在圆周  $C$  内部的零点个数 (记重数), 根据  $|f(z)| > |g(z)|, z \in C$  可知  $f_t$  在边界无零点, 根据辐角原理有

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz, \quad (3.75)$$

为证明  $n_t$  实际上为常数, 只需证明  $n_t$  对于  $t$  连续 (因为  $n_t$  取整数值). 因为  $f_t'/f_t$  对于  $t \in [0, 1], z \in C$  一致连续, 因此  $n_t$  也连续, 有  $n_0 = n_1$  得证.

下面证明一个几何上的结论, 全纯函数在局部为开映射.

**定义 3.4 (开映射)**

设  $f: A \rightarrow B, A, B$  为拓扑空间, 若  $f$  将  $A$  中的开集映为  $B$  中的开集, 则称  $f$  为开映射.

**定理 3.9 (开映射定理)**

设  $f$  在区域  $\Omega$  全纯且不为常数, 则  $f$  为开映射.



**证明** 设  $z_0 \in \Omega, w_0 = f(z_0)$ , 只需证明对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta$ , 使得圆盘  $B_\varepsilon(z_0)$  的像包含  $B_\delta(w_0)$ , 也就是说对任意与  $w_0$  充分近的  $w$ ,  $w$  包含在  $f$  的像集中 (即存在  $z$  使得  $f(z) = w$ ). 令

$$g(z) = f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = F(z) + G(z) \quad (3.76)$$

对任意  $\varepsilon > 0$  (满足  $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ , 并且在边界  $C$  有  $f(z) \neq w_0$ ), 取  $\delta > 0$  使得对任意  $z \in C$  都有  $|f(z) - w_0| \geq \delta$ , 这时只要  $|w - w_0| < \delta$  就有

$$|F(z)| = |f(z) - w_0| > |w_0 - w| = |G(z)|, \quad (3.77)$$

根据 Rouche 定理可知  $g$  在  $B_\varepsilon(z_0)$  中有与  $f$  相同数量零点 (一个), 得证.

最后证明最大模原理.

**定理 3.10 (最大模原理)**

设  $f$  为区域  $\Omega$  中的非常值全纯函数, 则  $f$  不能在  $\Omega$  内部取最大值.



**证明** 假设  $f$  在  $z_0 \in \Omega^\circ$  中取到最大值,  $D \subset \Omega$  为以  $z_0$  为中心的开圆盘, 则根据开映射定理可知  $f(D)$  为包含  $f(z_0)$  的开集, 这说明某个  $B_r(f(z_0)) \subset f(D)$ , 也就是说存在  $z \in D$  使得  $|f(z)| > |f(z_0)|$ , 与  $z_0$  处的最大性矛盾.

**推论 3.7**

设  $\Omega$  为区域, 且有紧致闭包  $\bar{\Omega}$ , 若  $f$  在  $\Omega$  全纯, 在  $\bar{\Omega}$  连续, 则

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)| \quad (3.78)$$



## 3.5 同伦与单连通性

推广 Cauchy 定理与分析多值函数的重点在于如何定义全纯函数的原函数. 关于这一点需要引入拓扑学中同伦的概念, 并由此定义单连通性.

**定义 3.5 (同伦)**

设  $\alpha, \beta$  为开集  $\Omega$  中的两条曲线, 且二者具有相同的起点、终点, 若存在连续映射  $F: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$  使得  $F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s)$ , 则称  $\alpha, \beta$  同伦.



**注** 换句话说, 两曲线同伦当且仅当其中一条能连续变化为另一条. 容易验证, 同伦也是一种等价关系.

**定理 3.11**

设  $f$  在  $\Omega$  中全纯, 曲线  $\gamma_0, \gamma_1 \subset \Omega$  同伦, 则

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \quad (3.79)$$



**证明** 我们的证明思路是, 任何距离较近且有相同起终点的曲线, 其上积分相同, 而后将区间进行划分, 使用这一思想即得.

根据条件, 存在连续映射  $F: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$  使得  $F(s, 0) = \gamma_0(s), F(s, 1) = \gamma_1(s)$ . 由于  $F$  的像紧致, 因此存在  $\varepsilon > 0$ , 使得任意  $B_{3\varepsilon}(z), z \in \text{Im } F$  都在  $\Omega$  中 (否则可以构造出两列点, 一列收敛到  $\Omega$ , 另一列收敛到  $\Omega^c$ , 并且二者具有相同极限, 矛盾).

对于上面选取的  $\varepsilon$ , 根据  $F$  的一致收敛性, 存在  $\delta > 0$  使得对任意  $|t_1 - t_2| < \delta$  有

$$\sup_{s \in [0, 1]} |F(s, t_1) - F(s, t_2)| < \varepsilon, \quad (3.80)$$

固定  $|t_1 - t_2| < \delta$ , 根据 **H-B** 定理, 可以选取半径  $2\varepsilon$  的圆盘  $\{D_0, \dots, D_n\}$  覆盖  $\gamma_{t_1}, \gamma_{t_2}$ , 取点列  $\{z_1, \dots, z_{n+1}\} \subset \gamma_{t_1}, \{w_1, \dots, w_{n+1}\} \subset \gamma_{t_2}$ , 并且

$$z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i, \quad (3.81)$$

再选择  $z_0 = w_0, z_{n+1} = w_{n+1}$  分别作为起点与终点, 如下图所示

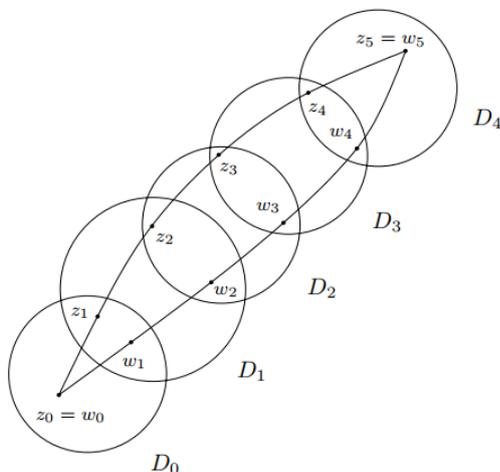


图 3.6: 覆盖圆盘

在每个圆盘  $D_i$  中, 令  $F_i$  表示  $f$  的原函数 (根据引理 2.1), 在相邻圆盘相交部分它们是同一个函数的不同原函数, 因此相差一个常数  $c_i$ , 因此

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_i(z_{i+1}) = F_{i+1}(w_{i+1}) - F_i(w_{i+1}), \quad (3.82)$$

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}) = F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}) \quad (3.83)$$

这说明

$$\int_{F_{t_1}} f - \int_{F_{t_2}} f = \sum_{i=0}^n [F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)] - \sum_{i=0}^n [F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)] \quad (3.84)$$

$$= \sum_{i=0}^n [F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})] - \sum_{i=0}^n [F_i(z_i) - F_i(w_i)] \quad (3.85)$$

$$= [F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1})] - [F_0(z_0) - F_0(w_0)] = 0 \quad (3.86)$$

将  $[0, 1]$  分成  $[t_i, t_{i+1}]$  的并, 并且每段长度小于  $\delta$ , 应用上述结论即证.

上面的记号有些混乱 (同伦映射与原函数), 日后再改.

### 定义 3.6 (单连通性)

称区域  $\Omega$  是单连通的, 若其中任意两条同起点、终点的曲线都同伦.

### 定理 3.12

单连通区域上的全纯函数有原函数.

**证明** 固定  $z_0 \in \Omega$ , 设  $\gamma$  为连接  $z_0$  与  $z \in \Omega$  的曲线, 则定义

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw \quad (3.87)$$

$\Omega$  的单连通性保证了上述定义与  $z_0, z$  之间曲线的选取无关 (它们都是同伦的, 或者说处于一个同伦等价类). 记  $\eta$  为连接  $z, z+h$  的曲线, 则

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(w)dw, \quad (3.88)$$

利用第二章中类似的过程可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z). \quad (3.89)$$

由此可以得到推广的 Cauchy 定理.

### 推论 3.8

设  $f$  为单连通区域  $\Omega$  上的全纯函数,  $\gamma$  为  $\Omega$  中的闭曲线, 则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (3.90)$$

单连通也可以理解为“任何环道都能连续收缩到一点”, 一个不单连通的例子就是  $\mathbb{C} - \{0\}$ , 而其上的函数  $1/z$  也则显然不满足上面的定理, 因为其绕单位圆周积分为  $2\pi i$ .

## 3.6 复对数

本节主要目的在于将对数推广到复平面  $\mathbb{C} - \{0\}$ , 若设  $z = e^{i\theta}$ , 则一个很自然的观点是定义对数为指数函数的反函数

$$\log z = \ln r + i\theta. \quad (3.91)$$

但这种定义的最大问题在于指数的周期性, 即  $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$ , 对于  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , 使之绕原点逆时针旋转一周, 那么  $z$  值不变, 但对数值改变了  $2\pi i$ , 这说明不可能全局地定义对数函数.

但如果考虑局部, 那么定义对数是可能的, 比如限制  $-\pi < \theta < \pi$ , 则可以定义出无歧义的对数, 这时的“局部”实际上是  $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ . 这种做法称为取多值函数的一支, 借助上一节讨论的单连通性, 可以更一般地讨论这一事实.

### 定理 3.13

设  $\Omega$  为单连通区域,  $1 \in \Omega, 0 \notin \Omega$ , 则在  $\Omega$  中有一支函数  $F(z) = \log_{\Omega}(z)$  满足:

1.  $F$  在  $\Omega$  中全纯.

2. 对任意  $z \in \Omega$  成立  $e^{F(z)} = z$ .
3. 对于 1 附近的实数  $r$ , 有  $F(r) = \ln r$ .



**证明** 易知  $f(z) = 1/z$  在  $\Omega$  中全纯, 因此可以定义

$$\log_{\Omega}(z) = F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw, \quad (3.92)$$

其中  $\gamma \subset \Omega$  连接 1,  $z$  两点. 根据  $\Omega$  的单连通性, 这样的定义是良好的, 并且  $F$  在  $\Omega$  全纯,  $F'(z) = 1/z$ , 这就证明了 1.

考虑 2, 只需要证明  $ze^{-F(z)} = 1$ , 对左式求导可得

$$\frac{d}{dz}(ze^{-F(z)}) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = (1 - zF'(z))e^{-F(z)} = 0, \quad (3.93)$$

因此  $ze^{-F(z)}$  为常值, 取  $z = 1$  可知  $ze^{-F(z)} = 1$ .

最后, 对于 1 附近的  $r$ , 设  $\gamma$  为连接 1,  $r$  的线段, 则

$$F(r) = \int_1^r \frac{dx}{x} = \ln r, \quad (3.94)$$

得证.

特别的, 在区域  $\Omega = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$  上可以定义对数的主要分支

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad (3.95)$$

其中  $z = re^{i\theta}$ ,  $|\theta| < \pi$ . 为证明上式, 只需要先后沿线段、圆弧积分可得

$$\log z = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_{\eta} \frac{dw}{w} \quad (3.96)$$

$$= \ln r + \int_0^{\theta} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt \quad (3.97)$$

$$= \ln r + i\theta \quad (3.98)$$

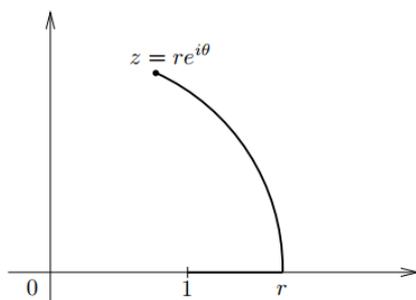


图 3.7: 积分路径

值得注意的是, 这时的对数函数并不满足实对数的一些性质, 比如

$$\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2, \quad (3.99)$$

考虑  $z_1 = z_2 = e^{2\pi i/3}$ ,  $z_1 z_2 = e^{-2\pi i/3}$ , 但是

$$\log(z_1 z_2) = -\frac{2\pi i}{3}, \quad \log z_1 + \log z_2 = \frac{2\pi i}{3}, \quad (3.100)$$

不过稍作修正, 可知该公式在辐角取代表元  $(-\pi, \pi)$  时依旧成立.

上面定义的主要分支还有一些良好的性质, 比如在一定范围内可以展开为 Taylor 级数

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n}, \quad |z| < 1 \quad (3.101)$$

在实数中, 有  $x^n = e^{n \ln x}$  的等式, 因此在定义复对数后, 可以紧接着定义复幂

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}, \quad (3.102)$$

每个非 0 复数  $w$  可以写作  $w = e^z$  的形式, 这种特性可以推广到函数上.

#### 定理 3.14

若  $f \neq 0$  为单连通区域  $\Omega$  中的全纯函数, 则存在  $\Omega$  上的全纯函数  $g$  满足

$$f(z) = e^{g(z)}. \quad (3.103)$$

**注** 这里的函数  $g(z)$  可以理解为取某一支的  $\log f(z)$ .

**证明** 固定  $z_0 \in \Omega$ , 考虑函数

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = c_0, \quad (3.104)$$

其中  $\gamma$  连接  $z_0, z$  两点,  $c_0 = \log f(z_0)$ , 可得  $g$  全纯, 且  $g'(z) = f'(z)/f(z)$ , 讨论函数  $f(z)e^{-g(z)}$  可证.

### 3.7 Fourier 级数与调和函数

下一章我们将讨论复变函数理论与实直线上 Fourier 分析的联系, 本节作为预热, 先讨论圆上的 Fourier 级数与全纯函数的幂级数展开之间的联系.

设  $f$  在圆盘  $D_R(z_0)$  全纯, 则  $f$  在圆盘中有收敛的幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.105)$$

显然的, 其中各项系数可以通过求导得到, 但借助 Cauchy 积分公式——微分与积分之间的联系, 可以得到其积分形式.

#### 定理 3.15

设  $f$  如上定义, 则其幂级数展开的各项系数为

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad (3.106)$$

进一步, 对任意  $n < 0$  有

$$0 = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) r^{-in\theta} d\theta. \quad (3.107)$$

**证明** 由于  $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ , 因此根据 Cauchy 积分公式有

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (3.108)$$

其中  $\gamma$  为以  $z_0$  为中心, 半径  $0 < r < R$  的圆周. 令  $\zeta = z_0 + re^{i\theta}$  就有

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} r i e^{i\theta} d\theta \quad (3.109)$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (3.110)$$

对于  $n < 0, -n - 1 \geq 0$  的情形, 由于

$$\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{-n-1} d\zeta \quad (3.111)$$

而右边为全纯函数的积分, 因此上式为 0.

上面的结果说明,  $f(z_0 + re^{i\theta})$  在固定圆周  $B_r(z_0)$  上的 Fourier 系数的正项 ( $n \geq 0$ ) 与  $f(z)$  在  $z_0$  处 Taylor 级数系数仅差一个倍数  $r^n$ , 而负项均为 0. 由此可以导出全纯函数一个非常重要的性质: 平均值性质.

**推论 3.9 (平均值性质)**

设  $f$  在圆盘  $D_R(z_0)$  全纯, 则对任意  $0 < r < R$  都有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad (3.112)$$



**证明** 由于  $a_0 = f(z_0)$ , 因此在上述定理中令  $n = 0$  得证.

如果对两边同时取实部, 可以得到一个调和函数的相同结论.

**推论 3.10**

设  $f$  在圆盘  $D_R(z_0)$  全纯,  $u = \operatorname{Re} f$ , 则对任意  $0 < r < R$  都有

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad (3.113)$$



## 第 4 章 Fourier 变换

对于在  $\mathbb{R}$  中满足良好性质的函数  $f$  (衰减性等), 可以定义 Fourier 变换以及 Fourier 逆变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad (4.1)$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-2\pi i x \xi} d\xi, \quad (4.2)$$

对于高维情形, 也可类似定义. 本章重点在于讨论一维 Fourier 分析与复分析之间的关系: 函数的解析性与其衰减性之间存在联系.

### 4.1 函数类 $\mathfrak{F}$

在过去讨论 Fourier 变换时, 我们曾提出过一个非常弱的衰减条件: 适度衰减 (moderate decrease), 即满足

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}, \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{A'}{1+\xi^2}, \quad (4.3)$$

本节提出一类函数, 它满足推广的适度衰减性, 以及后面将讨论的诸多性质.

#### 定义 4.1 (函数类 $\mathfrak{F}$ )

设  $a > 0$ , 定义  $\mathfrak{F}_a$  为满足如下条件的函数的全体:

1.  $f$  在水平条带  $S_a = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a\}$  上全纯.
2. 存在  $A > 0$ , 使得

$$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}, \quad x+iy \in S_a. \quad (4.4)$$



**注** 事实上, 定义中的  $A/(1+x^2)$  可以替换为对任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $A/(1+|x|^{1+\varepsilon})$ .

换句话说,  $\mathfrak{F}$  包含水平条带  $S_a$  中全纯, 且关于  $y = \operatorname{Im} z$  有“一致适度衰减”性质的函数. 例如对任意  $a > 0$ ,  $f(z) = e^{-\pi z^2} \in \mathfrak{F}_a$ , 类似可验证

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + z^2} \quad (4.5)$$

有  $f \in \mathfrak{F}_a$  ( $0 < a < c$ , 因为它在  $\pm ci$  处有极点). 还有一个例子是

$$f(z) = \frac{1}{\cosh(\pi z)}, \quad (4.6)$$

上一节中证明过其 Fourier 变换为自身, 它也在  $\mathfrak{F}_a$  中 ( $|a| < 1/2$ ). 利用 Cauchy 积分公式, 可以得到如下命题.

#### 命题 4.1

若全纯函数  $f \in \mathfrak{F}_a$ , 则其任意阶导数  $f^{(n)} \in \mathfrak{F}_b$ ,  $0 < b < a$ .



**证明** 全纯是显然的. 由于  $f$  在  $|\operatorname{Re} z| \leq 2$  部分有界, 故仅需考虑其余部分, 对任意  $z_0 = x + iy \in \mathfrak{F}_b$ , 存在  $r = \min\{a - b, 2/3\}$  使得  $C_r(z_0) \subset \mathfrak{F}_b$ , 根据 Cauchy 不等式可得

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \|f\|}{r^n} \leq \frac{n! A}{r^n (1 + (|z| - r)^2)} \leq \frac{2An!}{r^n} \frac{1}{1 + |z|^2} \leq \frac{A_n}{1 + x^2} \quad (4.7)$$

得证.

### 4.2 $\mathfrak{F}$ 中的 Fourier 变换

本节证明  $\mathfrak{F}$  中的三条定理, 包括 Fourier 逆变换的合理性、Poisson 求和公式, 它们的核心方法都是围道积分.

## 定理 4.1

若  $f \in \mathfrak{F}_a$ , 则对任意  $0 \leq b < a$  都有  $|\hat{f}(\xi)| \leq B e^{-2\pi b|\xi|}$ .



**证明** 根据定义

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad (4.8)$$

当  $b = 0$  时, 根据  $f$  的适度衰减性可知其无穷积分收敛, 即  $\hat{f}$  有界. 若  $0 < b < a$ , 则先设  $\xi > 0$ ,  $g(z) = f(z) e^{-2\pi i z \xi}$ , 考虑如下围道

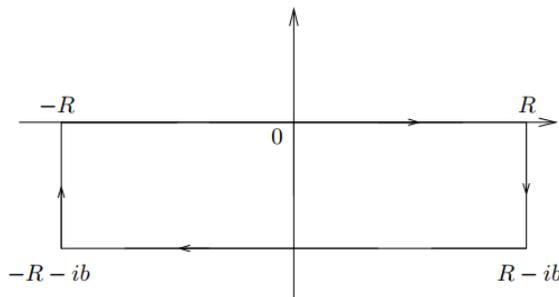


图 4.1:  $\xi > 0$  时的围道

利用  $f \in \mathfrak{F}_a$ , 在左边积分可得

$$\left| \int_{-R-ib}^{-R} g(z) dz \right| \leq \int_0^b |f(-R-it) e^{-2\pi i(-R-it)\xi}| dt \quad (4.9)$$

$$\leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^{-2\pi t \xi} dt \quad (4.10)$$

$$= O(1/R^2) \quad (4.11)$$

右边同理, 这说明  $R \rightarrow \infty$  时围道左右两边的积分趋于 0, 根据 Cauchy 定理以及  $f \in \mathfrak{F}_a$  可得

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-ib) e^{-2\pi i(x-ib)\xi} dx \quad (4.12)$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{A}{1+x^2} e^{-2\pi b \xi} dx \quad (4.13)$$

$$\leq B e^{-2\pi b \xi} dx, \quad (4.14)$$

对于  $\xi < 0$  的情形, 取与上述对称的围道可进行类似处理.

这说明若  $f \in \mathfrak{F}$ , 则  $\hat{f}$  在远处衰减非常快, 并且当  $a$  尽可能大时, 可以选择  $b$  尽可能大, 使得  $\hat{f}$  的衰减更快. 特别地, 这里也给出了一个“平移引理”. 第三节中将进一步利用这种观点, 给出一类最好的衰减性质: 紧支集.

根据  $\hat{f}$  的衰减性, 容易猜测其 Fourier 逆变换也成立, 其实数版本已经证明过. 首先考虑一个小引理.

## 引理 4.1

设  $A > 0, B \in \mathbb{R}$ , 则

$$\int_0^{\infty} e^{-(A+iB)\xi} d\xi = \frac{1}{A+iB}. \quad (4.15)$$



**证明** 由于  $A > 0$ ,  $|e^{-(A+iB)\xi}| \leq e^{-A\xi}$ , 因此积分收敛, 直接计算可得 (可以理解为存在原函数)

$$\int_0^{\infty} e^{-(A+iB)\xi} d\xi = \left[ -\frac{e^{-(A+iB)\xi}}{A+iB} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{A+iB}. \quad (4.16)$$

## 定理 4.2

设  $f \in \mathfrak{F}$ , 则其 Fourier 逆变换成立, 即

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

## 证明

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_0^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (4.18)$$

设  $f \in \mathfrak{F}_a$ , 则取  $0 < b < a$ , 由定理 4.1 可得

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u - ib) e^{-2\pi i(u-ib)\xi} du \quad (4.19)$$

因此

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u - ib) e^{-2\pi i(u-ib)\xi} e^{2\pi i x \xi} du d\xi \quad (4.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u - ib) \int_0^{\infty} e^{-2\pi(b+i(u-x))\xi} d\xi du \quad (4.21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u - ib) \frac{1}{2\pi b + 2\pi i(u-x)} du \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u - ib)}{u - ib - x} du \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \quad (4.24)$$

其中  $L_1$  为水平直线  $\{u - ib : u \in \mathbb{R}\}$ , 同理可得

$$\int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \quad (4.25)$$

其中  $L_2$  为水平直线  $\{u + ib : u \in \mathbb{R}\}$ , 则对于  $x \in \mathbb{R}$ , 考虑如下矩形围道

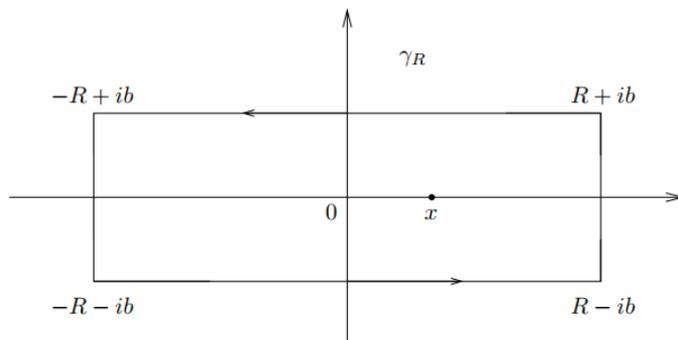


图 4.2: 矩形围道

由于  $f(\zeta)/(\zeta - x)$  在  $x$  处有简单极点, 根据留数定理可得

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \quad (4.26)$$

当  $R \rightarrow \infty$  时, 左右两边的积分趋于 0, 因此

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (4.27)$$

最后一个定理是 Poisson 求和公式的推广.

## 定理 4.3 (Poisson 求和公式)

设  $f \in \mathfrak{F}$ , 则

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \quad (4.28)$$



**证明** 设  $f \in \mathfrak{F}_a$ , 取  $0 < b < a$ , 则由于函数  $f(z)/(e^{2\pi iz} - 1)$  在整数  $n$  处有简单极点, 计算留数为  $f(n)/2\pi i$ , 则考虑如下围道

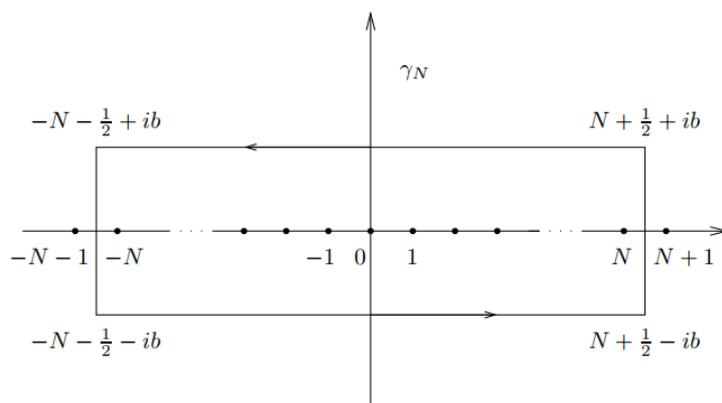


图 4.3: 矩形围道

应用留数公式可得

$$\sum_{|n| \leq N} f(n) = \int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \quad (4.29)$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 根据  $f$  的适度衰减性可知右式收敛到  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$ , 此时

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \quad (4.30)$$

由于几何级数满足

$$\frac{1}{w-1} = w^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n}, \quad |w| > 1 \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{w-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n}, \quad |w| < 1 \quad (4.32)$$

因此

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = e^{-2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}, \quad z \in L_1 = \mathbb{R} - ib \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz}, \quad z \in L_2 = \mathbb{R} + ib \quad (4.34)$$

利用上述等式计算可得

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \int_{L_1} f(z) \left( e^{-2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz} \right) dz + \int_{L_2} f(z) \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz} \right) dz \quad (4.35)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L_1} f(z) e^{-2\pi i(n+1)z} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L_2} f(z) e^{2\pi inz} dz \quad (4.36)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i(n+1)x} dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi inx} dx \quad (4.37)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(-n) \quad (4.38)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \quad (4.39)$$

上面用到了定理4.1中积分的“平移”性质.

下面讨论一些 Poisson 求和公式的应用.

**例 4.1** 已知

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi \xi^2}, \quad (4.40)$$

则对于  $t > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , 作换元  $x \mapsto t^{1/2}(x+a)$  可得

$$f(x) = e^{-\pi t(x+a)^2}, \quad \hat{f}(\xi) = t^{-1/2} e^{-\pi \xi^2/t} e^{2\pi i a \xi}, \quad (4.41)$$

借助 Poisson 求和公式可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(n+a)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{-1/2} e^{-\pi n^2/t} e^{2\pi i n a}. \quad (4.42)$$

上面的等式蕴含了 Theta 函数的一条性质, 定义

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}, \quad (4.43)$$

则

$$\theta(t) = t^{-1/2} \theta(1/t), \quad t > 0. \quad (4.44)$$

**例 4.2** 此外, 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{\cosh \pi x} = \frac{1}{\cosh \pi \xi}, \quad (4.45)$$

则对于  $t > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , 根据 Fourier 变换将旋转变换为平移的性质, 可得

$$f(x) = \frac{e^{-2\pi i a x}}{\cosh(\pi x/t)}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{t}{\cosh(\pi(\xi+a)t)}, \quad (4.46)$$

因此借助 Poisson 求和公式有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i a n}}{\cosh(\pi n/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{\cosh(\pi(n+a)t)} \quad (4.47)$$

上面的两个例子会在后面几章中用到.

## 4.3 Paley-Wiener 定理

本节改变一些思路, 从衰减性入手, 考虑函数与其 Fourier 变换之间的关系.

### 定理 4.4

设  $\hat{f}$  满足衰减条件  $|\hat{f}(\xi)| \leq A e^{-2\pi a |\xi|}$ , 则  $f(x)$  是一个在任意条带  $S_b = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < b\}$  中全纯的函数  $f(z)$  在  $\mathbb{R}$  上的限制,  $0 < b < a$ .



**证明** 设

$$f_n(z) = \int_{-n}^n \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad (4.48)$$

则  $f_n$  为整函数, 若定义 (级数绝对收敛)

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad z \in S_a, \quad (4.49)$$

则

$$|f(z) - f_n(z)| \leq A \int_{|\xi| \geq n} e^{-2\pi a|\xi|} e^{2\pi b|\xi|} \rightarrow 0 \quad (4.50)$$

即  $\{f_n\}$  绝对收敛到  $f$ , 因此  $f$  为全纯函数, 得证.

借助上述定理以及引理 2.2 可得推论

#### 推论 4.1

若  $\hat{f}(\xi) = O(e^{-2\pi a|\xi|})$ ,  $a > 0$ , 并且  $f$  在一个非空开区间为 0, 则  $f = 0$ .

P-W 定理给出了上述定理更进一步的结论, 将  $f$  的解析性与其 Fourier 变换的支集联系起来.

#### 定理 4.5 (Paley-Wiener 定理)

设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续且适度衰减, 则当且仅当  $\hat{f}$  在区间  $[-M, M]$  中支撑时,  $f$  可以延拓为  $\mathbb{C}$  上的整函数, 并且  $|f(z)| \leq Ae^{2\pi M|z|}$

**证明** 假设  $\text{supp } \hat{f} \subset [-M, M]$ , 此时 Fourier 逆变换公式为

$$f(x) = \int_{-M}^M \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad (4.51)$$

因此可以考虑全纯函数

$$g(z) = \int_{-M}^M \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad (4.52)$$

则  $f$  为  $g$  在  $\mathbb{R}$  中的限制, 设  $z = x + iy$  则

$$|g(z)| \leq \int_{-M}^M |\hat{f}(\xi)| e^{-2\pi \xi y} d\xi \leq Ae^{2\pi M|z|} \quad (4.53)$$

反过来的证明需要多花一些力气, 上面的推理实际上说明  $\text{supp } \hat{f} \subset [-M, M]$  就能推出  $|f(z)| \leq Ae^{2\pi M|y|}$ , 这个结论有助于我们逐步接近定理.

**Step 1.** 假设  $f$  在  $\mathbb{C}$  中全纯, 并且满足衰减条件

$$|f(x + iy)| \leq A' \frac{e^{2\pi M|y|}}{1 + x^2}, \quad (4.54)$$

下面证明在这种假设下, 对任意  $|\xi| > M$  都有  $\hat{f}(\xi) = 0$ . 不妨设  $\xi > M > 0$ , 借助此类积分的平移性质 (4.1) 可得 ( $y > 0$ )

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - iy) e^{-2\pi i \xi (x - iy)} dx \quad (4.55)$$

因此

$$|\hat{f}(\xi)| \leq A' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi M y - 2\pi \xi y}}{1 + x^2} dx \leq C e^{-2\pi y(\xi - M)} \quad (4.56)$$

令  $y \rightarrow \infty$ , 得证.

**Step 2.** 假设  $f$  全纯, 满足比 Step 1 更弱的衰减条件

$$|f(x + iy)| \leq Ae^{2\pi M|y|}, \quad (4.57)$$

假设  $\xi > M > 0$ , 考虑如下辅助函数

$$f_\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{(1 + i\varepsilon z)^2}, \quad (4.58)$$

其中因子  $1/(1 + i\varepsilon z)^2$  在下半平面的模长不超过 1, 并且计算可得

$$|\hat{f}_\varepsilon(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left| \frac{1}{(1 + i\varepsilon x)^2} - 1 \right| dx \quad (4.59)$$

根据  $f$  的适度衰减性可知  $\hat{f}_\varepsilon(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi)$ . 但对任意  $\varepsilon$  有

$$|f_\varepsilon(x+iy)| \leq A' \frac{e^{2\pi M|y|}}{1+x^2} \quad (4.60)$$

则由 Step 1 中的结论可知  $\hat{f}_\varepsilon(\xi) = 0$ , 令  $\varepsilon \rightarrow 0$  可得  $\hat{f}(\xi) = 0$ .

Step 3. 最后, 我们断言: 若对任意  $x \in \mathbb{R}$  有  $|f(x)| \leq 1$ , 并且对任意  $z \in \mathbb{C}$  有  $|f(z)| \leq e^{2\pi M|z|}$ , 则有

$$|f(x+iy)| \leq e^{2\pi M|y|}, \quad (4.61)$$

由于  $f(x)$  有界, 因此可以通过伸缩变换满足上述条件, 故得证.

下面来解决上述证明中的断言, 考虑如下定理

#### 定理 4.6 (Phragmen-Lindelof 定理)

设  $F$  在扇形区域  $S = \{z : -\pi/4 < \arg z < \pi/4\}$  全纯, 在  $\bar{S}$  连续, 在  $\partial S$  上有  $|F(z)| \leq 1$ , 并且存在  $C, c > 0$  使得  $|F(z)| \leq Ce^{c|z|}, z \in S$ , 则对任意  $z \in S$  有  $|F(z)| \leq 1$ .

事实上, P-L 定理中的扇形可以旋转, 因此考虑正方形区域  $Q = \{x+iy : x > 0, y > 0\}$ , 令

$$F(z) = f(z)e^{2\pi i M z}, \quad (4.62)$$

若  $|f(x)| \leq 1, |f(z)| \leq e^{2\pi M|z|}$ , 则  $|F(z)| \leq Ce^{c|z|}$ , 根据 P-L 定理可得对任意  $z \in Q$  有

$$|F(z)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq e^{2\pi M y}, \quad (4.63)$$

而对于其余三个正方形也可以作相同讨论, 因此断言得证.

下面证明 P-L 定理.

**证明** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 令  $F_\varepsilon(z) = F(z)e^{-\varepsilon z^{3/2}}$ , 这里的幂函数定义为对  $z = re^{i\theta}, |\theta| < \pi$  有  $z^{3/2} = r^{3/2}e^{3i\theta/2}$ , 其中

$$|e^{-\varepsilon z^{3/2}}| = e^{-\varepsilon r^{3/2} \cos(3\theta/2)}, \quad (4.64)$$

对于  $S$  内的点, 由于  $|\theta| < \pi/4$  得出  $|3\theta/2| < \pi/2$ , 因此  $\cos(3\theta/2)$  在  $S$  中恒为正. 因此  $F_\varepsilon$  在  $S$  中全纯, 并且

$$|F_\varepsilon(z)| \leq Ce^{c r - \varepsilon r^{3/2} \cos(3\theta/2)} = Ce^{r(c - \varepsilon r^{1/2} \cos(3\theta/2))} \quad (4.65)$$

说明  $F_\varepsilon$  在  $S$  中当  $z \rightarrow \infty$  时衰减很快, 即得  $F_\varepsilon$  有界, 下证对任意  $z \in \bar{S}$  有  $|F_\varepsilon(z)| \leq 1$ . 定义

$$M = \sup_{z \in \bar{S}} |F_\varepsilon(z)|, \quad (4.66)$$

设最大值在  $w$  处取到, 但根据前面的分析可知  $w \neq \infty$ , 进一步由最大模原理,  $w$  必定在  $\partial S$  中, 但边界恒有  $|F(z)|, |e^{-\varepsilon z^{3/2}}| \leq 1$ , 得证.

最后, 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 命题得证.

最后考虑 P-W 定理的另一个版本, 它刻画了对应 Fourier 变换在负半轴为 0 的函数的特性.

#### 定理 4.7

设  $f, \hat{f}$  适度衰减, 则  $f$  可以被延拓为上半平面中的连续有界函数且在内部全纯, 当且仅当对任意  $\xi < 0$  有  $\hat{f}(\xi) = 0$ .

**证明** 设  $\hat{f}(\xi) = 0, \xi < 0$ , 则根据 Fourier 逆变换公式可得

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad (4.67)$$

将其自然延拓, 设  $z = x + iy, y \geq 0$  则有

$$|f(z)| \leq A \int_0^\infty \frac{d\xi}{1+\xi^2} < \infty, \quad (4.68)$$

即  $f$  有界, 而  $f$  显然为  $\int_0^n$  的一致极限, 因此  $f$  全纯.

反之, 设  $\varepsilon, \delta > 0$ , 考虑辅助函数

$$f_{\varepsilon, \delta}(z) = \frac{z + i\delta}{(1 - i\varepsilon z)^2}, \quad (4.69)$$

则  $f_{\varepsilon, \delta}$  在下半平面中的某一区域全纯, 根据 Cauchy 定理可知对任意  $\varepsilon < 0$  有  $\hat{f}_{\varepsilon, \delta}(\xi) = 0$ , 而  $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_{0,0}(\xi)$ , 故得证.

## 第5章 整函数

本章讨论  $\mathbb{C}$  上的全纯函数——整函数的一些性质.

### 5.1 Jensen 等式

本节约定记号  $D_R = D_R(0), C_R = C_R(0)$ .

#### 定理 5.1 (Jensen)

设开集  $\Omega$  包含一个闭圆盘  $D_R$ ,  $f$  在  $\Omega$  中全纯,  $f(0) \neq 0$ , 且  $f$  在  $C_R$  不为 0, 若  $z_1, \dots, z_N$  表示  $f$  在  $D_R$  中的零点, 则

$$\ln |f(0)| = \sum_{k=1}^N \ln \left( \frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta. \quad (5.1)$$

**证明** 首先根据对数  $\ln xy = \ln x + \ln y$  的性质观察到: 若  $f_1, f_2$  满足上述等式, 则  $f_1 f_2$  也满足这一等式, 设

$$f(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_N) g(z), \quad (5.2)$$

其中  $g(z)$  为全纯函数且在  $D_R$  中恒不为 0, 下面分别证明  $g(z)$  以及每个  $z - z_k$  满足等式. 首先证明

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(Re^{i\theta})| d\theta, \quad (5.3)$$

由于  $g \neq 0$ ,  $\Omega$  单连通, 因此存在  $\Omega$  上的全纯函数  $h$  使得  $g(z) = e^{h(z)}$ , 即得  $|g(z)| = |e^{h(z)}| = e^{\operatorname{Re}(h(z))}$ , 因此  $\ln |g(z)| = \operatorname{Re}(h(z))$ , 则根据调和函数的平均值性质有

$$\ln |g(0)| = \operatorname{Re}(h(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(h(Re^{i\theta})) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(Re^{i\theta})| d\theta, \quad (5.4)$$

再证明对每个  $z - z_k$  成立等式, 实际上只需证

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{i\theta} - z_k/R| d\theta \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{i\theta} - a| d\theta, \quad |a| < 1 \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |1 - ae^{i\theta}| d\theta, \quad |a| < 1 \quad (5.7)$$

考虑  $F(z) = 1 - az$ , 则  $F$  在单位圆盘中不为 0, 因此仿照对  $g$  的讨论可知

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(e^{i\theta})| d\theta = \ln |F(0)| = 0 \quad (5.8)$$

得证.

如果引入新的记号  $\mathbf{n}(r) = \mathbf{n}_f(r)$  表示在圆盘  $B_r$  内函数的零点个数, 则可以断言如下等式成立

$$\int_0^R \mathbf{n}(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)| \quad (5.9)$$

上述等式将全纯函数的增长与其局部零点个数联系在了一起, 这只需证明如下引理

#### 引理 5.1

设  $z_1, \dots, z_N$  为  $f$  在圆盘  $D_R$  中的零点, 则

$$\int_0^R \mathbf{n}(r) \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{R}{z_k} \right|. \quad (5.10)$$

**证明** 根据对数的性质有

$$\sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{R}{z_k} \right| = \sum_{k=1}^N \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r}, \quad (5.11)$$

若定义示性函数

$$\eta_k(r) = \begin{cases} 1, & r > |z_k| \\ 0, & r \leq |z_k| \end{cases} \quad (5.12)$$

则显然有  $n(r) = \sum_{k=1}^N \eta_k(r)$ , 因此

$$\sum_{k=1}^N \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \int_0^R \eta_k(r) \frac{dr}{r} = \int_0^R n(r) \frac{dr}{r}. \quad (5.13)$$

得证.

## 5.2 有限阶函数

### 定义 5.1 (整函数的阶)

设  $f$  为整函数, 若存在  $\rho > 0$  以及常数  $A, B > 0$  使得对任意  $z \in \mathbb{C}$  有

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|^\rho}, \quad (5.14)$$

则称  $f$  有  $\leq \rho$  的阶, 定义  $f$  的阶为  $\rho_f = \inf \rho$ .

根据定义可知, 函数  $e^{z^2}$  的阶为 2.

### 定理 5.2

设  $f$  为阶  $\leq \rho$  的整函数, 则

1. 存在  $C > 0$ , 使得对充分大的  $r$  有  $n(r) \leq Cr^\rho$ .
2. 若  $z_1, z_2, \dots$  表示  $f$  的零点, 且  $z_k \neq 0$ , 则对任意  $s > \rho$  有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty. \quad (5.15)$$

**证明**

1. 不妨设  $f(0) \neq 0$  (否则考虑  $F(z) = f(z)/z^l$ ,  $F(0) \neq 0$ , 则二者的  $n$  之间仅相差一个常数), 则根据 Jensen 等式有

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)|, \quad (5.16)$$

取  $R = 2r$ , 则有不等式

$$\int_r^{2r} n(x) \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)| \quad (5.17)$$

其中

$$\int_r^{2r} n(x) \frac{dx}{x} \geq n(r) \int_r^{2r} \frac{dx}{x} = n(r) \ln 2 \quad (5.18)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \ln |Ae^{BR^\rho}| d\theta \leq C'r^\rho \quad (5.19)$$

后者对充分大的  $r$  成立, 因此有  $n(r) \leq Cr^\rho$ .

2. 根据引理2.2, 这里零点仅有限个在  $D_1$  中, 因此只需考虑  $D_1$  外的零点, 而

$$\sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{2^j \leq |z_k| < 2^{j+1}} |z_k|^{-s} \right) \quad (5.20)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} 2^{j+1} \quad (5.21)$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} 2^{(j+1)\rho} \leq c' \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\rho-s)j} \quad (5.22)$$

$$< \infty \quad (5.23)$$

得证.

其中第二条在后面的章节中会用到, 下面考虑上述定理的两个例子.

**例 5.1** 设  $f(z) = \sin \pi z$ , 则

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}, \quad (5.24)$$

这说明  $|f(z)| \leq e^{\pi|z|}$ , 即  $f$  阶  $\leq 1$ , 而  $f$  在所有  $n \in \mathbb{Z}$  处取值为 0, 因此对任意  $s > 1$  都有

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^s} < \infty, \quad (5.25)$$

此即 Zeta 函数的收敛性.

**例 5.2** 设  $f(z) = \cos z^{1/2}$ , 且定义

$$\cos z^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (5.26)$$

因此  $f$  为整函数, 且  $|f(z)| \leq e^{|z|^{1/2}}$ , 而  $f$  在所有  $z_n = ((n+1/2)\pi)^2$  处为 0, 因此对任何  $s > 1/2$  都有

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|z_n|^s} < \infty. \quad (5.27)$$

有一个自然的问题: 给定序列  $z_1, z_2, \dots$ , 是否存在一个整函数恰好以这些点为零点? 一个必要条件是该序列发散到无穷, 否则由引理2.2可知这样的函数必然处处取 0. Weierstrass 证明了只是这样的发散条件就可以精确构造处所要的函数, 一个自然的猜测是无穷乘积

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots, \quad (5.28)$$

如何考虑其收敛? 如何保证其收敛? 这就是接着要讨论的问题.

## 5.3 无穷乘积

对于序列  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , 可以考虑其无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + a_N), \quad (5.29)$$

若无穷乘积符号不变, 则可以通过取对数变为级数形式, 如下命题体现了二者的联系.

### 命题 5.1

若  $\sum |a_n| < \infty$ , 则无穷乘积  $\prod (1 + a_n)$  收敛.

**证明** 当  $n$  充分大时, 有  $|a_n| < 1/2$ , 因此可定义  $\ln(1 + a_n)$ , 且有

$$\prod_{n=1}^N (1 + a_n) = e^{\sum_{n=1}^N \ln(1 + a_n)} = e^{B_N} \quad (5.30)$$

而当  $|a_n| < 1/2$  时有

$$|\ln(1 + a_n)| \leq 2|a_n| \quad (5.31)$$

因此  $B_N$  收敛, 故无穷乘积收敛.

更一般的, 可以考虑全纯函数列的无穷乘积.

### 命题 5.2

设  $\{F_n\}$  为开集  $\Omega$  上的全纯函数列, 若存在  $c_n > 0$  使得对任意  $z \in \Omega$

$$\sum c_n < \infty, \quad |F_n(z) - 1| \leq c_n, \quad (5.32)$$

则

1. 无穷乘积  $\prod F_n(z)$  在  $\Omega$  中一致收敛到全纯函数  $F(z)$ .
2. 若对任何  $n$ ,  $F_n \neq 0$ , 则

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}. \quad (5.33)$$

### 证明

1. 设  $F_n(z) = 1 + a_n(z)$ , 则根据 Weierstrass 判别法可知  $\sum a_n(z)$  一致收敛, 进而由上一命题可知  $F_n = 1 + a_n$  的无穷乘积一致收敛到函数  $F$ .
2. 设  $K \subset \Omega$  为紧集, 令

$$G_N(z) = \prod_{n=1}^N F_n(z), \quad (5.34)$$

则在  $\Omega$  中  $G_N \rightrightarrows F$ , 进而在  $K$  中  $G'_N \rightrightarrows F'$ , 进一步在  $K$  中有  $G'_N/G_N \rightrightarrows F'/F$ , 根据  $K$  的任意性可知该极限在  $\Omega$  内逐点有效, 而

$$\frac{G'_N}{G_N} = \sum_{n=1}^N \frac{F'_n}{F_n}, \quad (5.35)$$

故得证.

下面考虑一个无穷乘积的经典例子.

**例 5.3** 可证正弦函数的乘积表示

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad (5.36)$$

令

$$G(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \quad P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad (5.37)$$

则容易计算

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \cot \pi z, \quad \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad (5.38)$$

根据  $\cot \pi z$  的展开有  $G'/G = P'/P$ , 因此

$$\left(\frac{P(z)}{G(z)}\right)' = \frac{P(z)}{G(z)} \left[\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{G'(z)}{G(z)}\right] = 0, \quad (5.39)$$

这说明  $P(z) = cG(z)$ , 令  $z \rightarrow 0$  可知  $c = 1$ .

上面的证明还有一些细节需要补充, 即余切函数的级数展开, 这可以通过 Poisson 求和公式得到, 但这里给出另一种证明.

## 命题 5.3

$$\pi \cot \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \quad (5.40)$$

证明分为两步, 首先考虑级数与余切函数的一些相同性质, 再通过做差证明二者相差为 0.

**证明** Step 1. 容易看出  $\sum 1/(z+n)$  满足余切函数  $F(z) = \pi \cot \pi z$  的如下性质

1. 对任意  $z \notin \mathbb{Z}$ , 有  $F(z+1) = F(z)$ .
2.  $F(z) = 1/z + F_0(z)$ , 其中  $F_0$  在 0 附近解析.
3.  $F(z)$  在整数点有简单极点, 并且没有其它奇点.

Step 2. 做差, 令

$$\Delta(z) = F(z) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}, \quad (5.41)$$

此时  $\Delta$  满足周期条件, 且以 0 为可去奇点, 进一步由周期性可知  $\Delta$  的所有极点都是可去的, 即  $\Delta$  为整函数. 而  $\Delta$  同时为奇函数, 因此只要证明  $\Delta$  有界, 则根据 Liouville 定理就能确定  $\Delta \equiv 0$ . 根据周期性考虑  $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1/2$  的范围, 则有

$$\cot \pi z = i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2\pi i x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2\pi i x}} \quad (5.42)$$

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{x+iy} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x+iy)}{x^2 - y^2 - n^2 + 2ixy}, \quad (5.43)$$

为了更好地估计范围, 再考虑  $|\operatorname{Im}(z)| > 1$  的范围 (因为它在有限矩形内全纯, 故有界), 则  $\cot \pi z$  在该范围内有界, 而级数和满足

$$\left| \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq C + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2}, \quad (5.44)$$

右式的主要值由另一个正项级数决定, 根据 Cauchy 积分判别法, 由于反常积分

$$\int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \pi/2, \quad (5.45)$$

因此有界性得证, 根据前面的讨论可知命题得证.

## 5.4 Weierstrass 无穷乘积

本节进入主题, 证明 Weierstrass 的结果.

### 定理 5.3 (Weierstrass)

给定发散复数列  $\{a_n\}$ , 存在整函数  $f$  仅在所有  $a_k$  处为 0 (记重数), 且这种整函数均有形式  $f(z)e^{g(z)}$ ,  $g$  为整函数.

Weierstrass 定理可以看作  $\mathbb{C}$  中可数情形的插值定理. 容易发现, 若  $f_1, f_2$  均仅在所有  $z = a_k$  处取 0, 则  $f_1/f_2$  的所有奇点都是可去奇点, 因此  $f_1/f_2$  实际上是非 0 整函数, 因此根据定理 3.14 可知存在整函数  $g(z)$  使得

$$\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = e^{g(z)}, \quad f_1(z) = f_2(z)e^{g(z)} \quad (5.46)$$

根据上一节中  $\sin \pi z$  的展开, 可以猜测结果为  $\prod_n (1 - z/a_n)$ , 为了避免一些收敛性的问题, 这里引入 **典范因子 (canonical factors)**

$$E_0(z) = 1 - z, \quad E_k(z) = (1 - z)e^{z + z^2/2 + \dots + z^k/k}, \quad k \geq 1, \quad (5.47)$$

其中  $k$  称为典范因子的次数.

## 引理 5.2

若  $|z| \leq 1/2$ , 则存在  $c > 0$  使得  $|1 - E_k(z)| \leq c|z|^{k+1}$ .



**证明** 此时  $1 - z = e^{\ln(1-z)}$ , 因此

$$E_k(z) = e^{\ln(1-z) + z + \dots + z^k/k} = e^w, \quad (5.48)$$

其中

$$w = - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |w| \leq |z|^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|z|^{n-k-1}}{n} \leq |z|^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2|z|^{k+1}. \quad (5.49)$$

此时  $|w| \leq 1$ ,  $|1 - e^w|/|w| \leq (e^{|w|} - 1)/|w|$  有界, 因此

$$|1 - E_k(z)| = |1 - e^w| \leq c'|w| \leq c|z|^{k+1}. \quad (5.50)$$

假设给定 0 处的零点阶数为  $m$ , 则定义 Weierstrass 乘积为

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n), \quad (5.51)$$

下证该函数满足要求, 固定  $R > 0$ , 设  $|z| < R$ , 根据  $R$  的任意性只需证明在圆盘  $B_R(0)$  中满足要求. 所有  $a_n$  可以分为两类:  $|a_n| \leq 2R$  或  $|a_n| > 2R$ , 而前者仅有限多个, 对于后者有  $|z/a_n| \leq 1/2$ , 根据引理可得

$$|1 - E_n(z/a_n)| \leq c \left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} \leq \frac{c}{2^{n+1}} \quad (5.52)$$

因此根据上一节的结论可知无穷乘积  $\prod_{|a_n| \geq 2R} E_n(z/a_n)$  定义了  $B_R(0)$  中的全纯函数, 且在圆盘内无零点, 得证.

## 5.5 Hadamard 分解定理

本节的定理将综合前几节得到的结果. Weierstrass 定理构造出了仅在无极限点列  $a_1, a_2, \dots$  取 0 的函数

$$e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n), \quad (5.53)$$

Hadamard 进一步讨论了这一结果, 指出当整函数为有限阶时, 其典范因子可以取一定阶, 而  $g$  为多项式. 我们在前几节讨论过, 称整函数有  $\leq \rho$  的阶, 若

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}, \quad (5.54)$$

并且  $\rho_f = \inf \rho$ , 而对于满足这种条件的函数, 当  $r$  充分大时有

$$n(r) \leq Cr^\rho \quad (5.55)$$

若  $a_1, a_2, \dots$  为  $f$  的非零零点,  $s > \rho$ , 则

$$\sum |a_n|^{-s} < \infty. \quad (5.56)$$

### 定理 5.4 (Hadamard 分解定理)

设  $f$  为阶为  $\rho_0$  的整函数, 设  $k \in \mathbb{N}$  满足  $k \leq \rho_0 < k+1$ , 若  $a_1, a_2, \dots$  表示  $f$  的非零零点, 则

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n), \quad (5.57)$$

其中  $P$  为次数不超过  $k$  的多项式,  $m$  为  $z=0$  作为  $f$  零点的阶数.



## 主要引理

首先考虑 Hadamard 定理所需的一些引理.

## 引理 5.3

典范因子满足

$$|E_k(z)| \geq e^{-c|z|^{k+1}}, \quad |z| \leq 1/2, \quad (5.58)$$

$$|E_k(z)| \geq |1 - z|e^{-c'|z|^k}, \quad |z| \geq 1/2, \quad (5.59)$$



**证明** 当  $|z| \leq 1/2$  时有

$$E_k(z) = e^{\ln(1-z) + z + \dots + z^k/k} = e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty} z^n/n} = e^w, \quad (5.60)$$

由于  $|w| \leq c|z|^{k+1}$ ,  $|e^w| \geq e^{-|w|}$ , 故第一式得证.

当  $|z| \geq 1/2$  时有

$$|E_k(z)| = |1 - z| |e^{z + \dots + z^k/k}| \geq |1 - z| e^{-|z + \dots + z^k/k|} \geq |1 - z| e^{-c'|z|^k}, \quad (5.61)$$

得证.

证明 Hadamard 定理的关键是对远离零点的  $z$ , 找到典范因子更小的界, 由此考虑如下估计.

## 引理 5.4

对任意  $s$  满足  $\rho_0 < s < k + 1$ , 下式

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n) \right| \geq e^{-c|z|^s}, \quad (5.62)$$

在除过一族圆盘  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{|a_n|^{-k-1}}(a_n)$  之外成立



**证明**

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n) = \prod_{|a_n| \leq 2|z|} E_k(z/a_n) \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k(z/a_n), \quad (5.63)$$

借助引理, 对第二部分有放缩

$$\left| \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k(z/a_n) \right| = \prod_{|a_n| > 2|z|} |E_k(z/a_n)| \quad (5.64)$$

$$\geq \prod_{|a_n| > 2|z|} e^{-c|z/a_n|^{k+1}} \quad (5.65)$$

$$= e^{-c|z|^{k+1} \sum_{|a_n| > 2|z|} |a_n|^{-k-1}} \quad (5.66)$$

再根据  $|a_n| > 2|z|$ ,  $s < k + 1$  有

$$|a_n|^{-k-1} = |a_n|^{-s} |a_n|^{s-k-1} \leq C |a_n|^{-s} |z|^{s-k-1}, \quad |z|^{k+1} \sum_{|a_n| > 2|z|} |a_n|^{-k-1} \leq C |z|^s \sum_{|a_n| > 2|z|} |a_n|^{-s} \quad (5.67)$$

注意到  $\sum |a_n|^{-s}$  收敛, 故

$$\left| \prod_{|a_n| > 2|z|} E_k(z/a_n) \right| \geq e^{-c|z|^s} \quad (5.68)$$

下面估计第一部分, 借助引理有

$$\left| \prod_{|a_n| \leq 2|z|} E_k(z/a_n) \right| \geq \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \prod_{|a_n| \leq 2|z|} e^{-c'|z/a_n|^k} \quad (5.69)$$

$$= \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \quad (5.70)$$

作同样的放缩可得  $|a_n|^{-k} = |a_n|^{-s} |a_n|^{s-k} \leq C |a_n|^{-s} |z|^{s-k}$ , 第二部分有

$$e^{-c'|z|^k \sum_{|a_n| \leq 2|z|} |a_n|^{-k}} \geq e^{-c|z|^s}, \quad (5.71)$$

若  $z$  不在圆盘  $B_{|a_n|^{-k-1}}(a_n)$  中, 则有  $|a_n - z| \geq |z_n|^{-k-1}$ , 因此

$$\prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| = \prod_{|a_n| \leq 2|z|} \left| \frac{a_n - z}{a_n} \right| \quad (5.72)$$

$$\geq \prod_{|a_n| \leq 2|z|} |a_n|^{-k-1} |a_n|^{-1} \quad (5.73)$$

$$= \prod_{|a_n| \leq 2|z|} |a_n|^{-k-2}, \quad (5.74)$$

最后取对数估计可得

$$(k+2) \sum_{|a_n| \leq 2|z|} \ln |a_n| \leq (k+2)n(2|z|) \ln 2|z| \quad (5.75)$$

$$\leq c|z|^s \ln 2|z| \quad (5.76)$$

$$\leq c'|z|^{s'} \quad (5.77)$$

得证.

### 引理 5.5

存在一列半径  $r_1, r_2, \dots \rightarrow \infty$  使得

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n) \right| \geq e^{-c|z|^s}, \quad |z| = r_m \quad (5.78)$$



**证明** 根据  $\sum |a_n|^{-k-1}$  的收敛性, 存在充分大的  $N$  使得

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^{-k-1} < 1/10, \quad (5.79)$$

断言: 对于连续的整数  $L, L+1$ , 存在  $r \in [L, L+1]$  使得  $C_r(0)$  与上一条引理中要求的圆盘无交; 若不然, 则如下区间的并

$$I_n = \left[ |a_n| - \frac{1}{|a_n|^{k+1}}, |a_n| + \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \right], \quad (5.80)$$

覆盖整个  $[L, L+1]$ , 这说明  $2 \sum_{n \geq N} |a_n|^{-k-1} \geq 1$ , 矛盾. 由此分别取  $|z| = r$  得证.

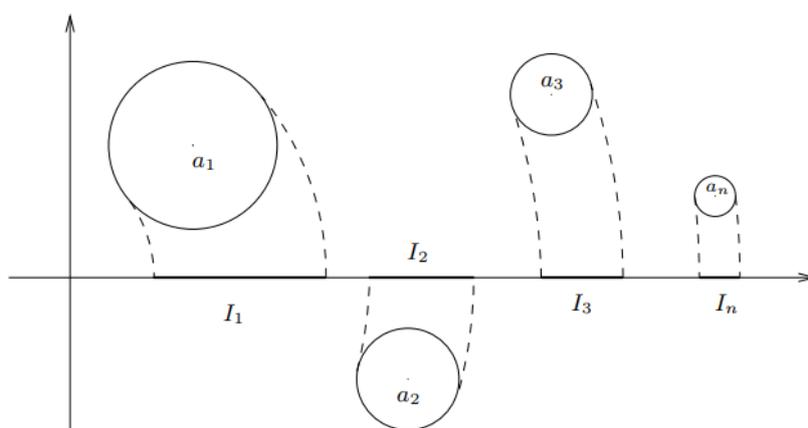


图 5.1: 圆盘 & 区间

## Hadamard 定理的证明

设

$$E(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n), \quad (5.81)$$

首先证明  $E$  全纯, 根据引理5.2, 当  $n$  充分大时有

$$|1 - E_k(z/a_n)| \leq c \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k+1}, \quad (5.82)$$

并且  $\sum |a_n|^{-k-1}$  收敛 ( $\rho_0 < s < k+1$ ), 重复 Weierstrass 定理的证明可知  $E$  整. 进一步由于  $E$  有  $f$  的全部零点, 因此  $f/E$  全纯且不取 0, 即  $f(z)/E(z) = e^{g(z)}$ , 其中  $g$  为整函数. 根据函数  $f$  的阶以及  $E(z)$  的估计可知存在一列半径  $\{r_n\} \rightarrow \infty$  使得对任意  $|z| = r$  有

$$e^{\operatorname{Re}(g(z))} = \left| \frac{f(z)}{E(z)} \right| \leq c' e^{c|z|^s} \quad (5.83)$$

最后只需证明  $g$  为满足条件的多项式, 这由如下引理给出.

## 引理 5.6

设  $g$  为整函数且  $u = \operatorname{Re}g(z)$  满足对一列  $\{r_n\} \rightarrow \infty$  满足

$$u(z) \leq Cr^s, \quad |z| = r \quad (5.84)$$

则  $g$  为一个次数不超过  $s$  的多项式.



**证明** 设  $g$  在原点处有幂级数展开

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (5.85)$$

则根据定理3.15可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} a_n r^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5.86)$$

取共轭可知对  $n > 0$  有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(re^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0, \quad (5.87)$$

则  $2u = g + \bar{g}$  满足

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta, \quad n > 0 \quad (5.88)$$

$n = 0$  时

$$2\operatorname{Re}a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta, \quad (5.89)$$

当  $n \neq 0$  时函数  $e^{-in\theta}$  在圆周上积分为 0, 因此

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} [u(re^{i\theta}) - Cr^s] e^{-in\theta} d\theta \quad (5.90)$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} [Cr^s - u(re^{i\theta})] d\theta \leq 2Cr^{s-n} - 2\operatorname{Re}a_0 r^{-n} \quad (5.91)$$

令  $r \rightarrow \infty$  可知对任意  $n > s$  有  $a_n = 0$ , 得证.

## 第 6 章 Gamma 函数与 Zeta 函数

Gamma 函数与 Zeta 函数是数学中非常重要的两个函数，前者在数学中无处不在，而后者更是在数论中应用广泛，借助 Zeta 函数可以证明 Dirichlet 定理，以及 Euler 给出的证明素数无穷多个的方法：

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s). \quad (6.1)$$

### 6.1 Gamma 函数

#### 定义 6.1 (Gamma 函数)

对  $s > 0$ ，定义 Gamma 函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (6.2)$$

对任意  $s > 0$ ， $t^{s-1}$  在 0 附近反常可积，而当  $t$  充分大时，被积函数可以被指数的衰减性控制，因此积分收敛。进一步，借助相同的积分形式，可以将其延拓到复平面上。

#### 命题 6.1

Gamma 函数可以自然延拓到右半复平面  $\operatorname{Re}(s) > 0$  上。

**证明** 只需证明对任意  $0 < \delta < M < \infty$ ，上述积分定义了竖直条带  $S_{\delta, M} = \{\delta < \operatorname{Re}(s) < M\}$  中的一个全纯函数。考虑函数

$$F_{\varepsilon}(s) = \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad (6.3)$$

根据定理 2.9， $F_{\varepsilon}(s)$  在  $S_{\delta, M}$  全纯，设  $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ ，则  $|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t} t^{\sigma-1}$ ，则

$$|\Gamma(s) - F_{\varepsilon}(s)| \leq \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \quad (6.4)$$

其中第一项可充分小，第二项

$$\left| \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| \leq \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{M-1} dt \leq C \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t/2} dt \rightarrow 0 \quad (6.5)$$

因此  $\Gamma$  是  $F_{\varepsilon}$  的一致极限，即  $\Gamma$  在  $S_{\delta, M}$  中全纯，得证。

虽然在右半平面外的区域，Gamma 函数定义中的积分发散，但是我们依旧可以找到一个  $\mathbb{C}$  中的亚纯函数，使得其在右半平面的限制等于  $\Gamma(s)$ ，换句话说，就是对  $\Gamma$  作全平面的延拓。为了证明这一结论，首先考虑如下引理

#### 引理 6.1

若  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ，则  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ ，特别地，对  $n \in \mathbb{N}$  有  $\Gamma(n+1) = n!$ 。

**证明** 分部积分可得

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt \quad (6.6)$$

$$= -t^s e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} s t^{s-1} dt \quad (6.7)$$

$$= s\Gamma(s) \quad (6.8)$$

由于  $\Gamma(1) = 1$ ，因此  $\Gamma(n+1) = n!$ 。

**定理 6.1**

Gamma 函数可以解析延拓到  $\mathbb{C}$  中, 并且其简单极点为  $s = 0, -1, \dots$ , 且  $\text{Res}(\Gamma, -n) = (-1)^n/n!$ .

**证明** 只需对任意整数  $m \geq 1$ , 将  $\Gamma$  解析延拓到  $\text{Re}(s) > -m$  中. 对于  $\text{Re}(s) > -1$ , 定义

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad (6.9)$$

则  $F_1$  在  $\text{Re}(s) > -1$  全纯, 计算留数可得  $\text{Res}(F_1, 0) = \Gamma(1) = 1$ , 并且根据前述引理, 对任意  $\text{Re}(s) > 0$ , 都有  $F_1(s) = \Gamma(s)$ , 因此  $F_1$  给出了  $\Gamma$  的一个延拓. 以此类推, 对任意  $\text{Re}(s) > -m$ , 定义

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)\cdots(s+1)s}, \quad (6.10)$$

则  $F_m$  在  $\text{Re}(s) > -m$  全纯, 简单极点为  $0, -1, -2, \dots, -m+1$ , 计算留数可得

$$\text{Res}(F_m, -n) = \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)\cdots(s+1)} \quad (6.11)$$

$$= \frac{\Gamma(-n+m)}{(m-1-n)!(-1)(-2)\cdots(-n)} \quad (6.12)$$

$$= \frac{(m-n-1)!}{(m-1-n)!(-1)(-2)\cdots(-n)} \quad (6.13)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \quad (6.14)$$

由此得证.

根据上面的延拓, 对任意不为极点的  $s$ , 都有  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ . 事实上, 对于极点  $s = -n$ , 也可以得到留数的递推关系

$$\text{Res}(\Gamma, -n+1) = -n\text{Res}(\Gamma, -n), \quad (6.15)$$

而  $\Gamma(1) = \text{Res}(\Gamma, 0) = 1$ , 由此也可得到  $\Gamma$  函数在极点处的留数.

上面的定理还有另一个证明, 将  $\Gamma(s)$  分解为

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad (6.16)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+s)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad (6.17)$$

只需证明上面的级数定义了一个亚纯函数, 对充分大的  $R > 0$ , 将上述级数分为  $\sum_{n=0}^N$  和  $\sum_{n=N+1}^{\infty}$  两部分, 使得  $N > 2R$ , 其中前者亚纯, 在对应极点具有对应的留数, 后者满足

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(n+s)} \right| \leq \frac{1}{n!R}, \quad (6.18)$$

因此在圆盘  $D_R$  中一致收敛, 得证.

**Gamma 函数的更多性质**

下面的定理表明了 Gamma 函数关于  $\text{Re}(s) = 1/2$  的对称性.

**定理 6.2 (余元公式)**

对任意  $s \in \mathbb{C}$  有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \quad (6.19)$$

**注** 特别地, 根据余元公式可得  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

注意到  $\Gamma(1-s)$  具有简单极点  $s = 1, 2, \dots$ , 因此左式为以所有整数为简单极点的全纯函数, 而这恰好是函数  $\pi/\sin(\pi s)$  所具有的性质. 下面给出严格的证明. 根据解析延拓, 只需证明在  $0 < s < 1$  范围内成立即可.

**证明** 由于

$$\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-s} du = t \int_0^{\infty} e^{-vt} (vt)^{-s} dv, \quad (6.20)$$

计算可得

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \left( t \int_0^{\infty} e^{-vt} (vt)^{-s} dv \right) dt \quad (6.21)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t(1+v)} v^{-s} dt dv \quad (6.22)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{v^{-s}}{1+v} dv \quad (6.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-s)x}}{1+e^x} dx \quad (6.24)$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi(1-s)} \quad (6.25)$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (6.26)$$

回忆第三章留数定理计算积分的一个例子, 表明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad (6.27)$$

根据余元公式可以得到如下推论.

#### 推论 6.1

$1/\Gamma(s)$  是整函数, 有且仅有简单零点  $0, -1, -2, \dots$ .



**证明** 由余元公式可得

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \Gamma(1-s) \frac{\sin \pi s}{\pi}, \quad (6.28)$$

其中  $\Gamma(1-s)$  的简单极点为  $1, 2, 3, \dots$ , 这些极点被  $\sin \pi s$  对应的简单零点抵消, 因此  $1/\Gamma$  仅有  $\sin \pi s$  的其余 (简单) 零点, 即  $0, -1, -2, \dots$ .

下面考虑  $1/\Gamma$  的一个估计.

#### 命题 6.2

对于  $1/\Gamma$  有估计

$$\left| \frac{1}{\Gamma(s)} \right| \leq c_1 e^{c_2 |s| \ln |s|}, \quad (6.29)$$

由此可推得  $1/\Gamma$  的阶为 1, 因为对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $c(\varepsilon)$  使得

$$\left| \frac{1}{\Gamma(s)} \right| \leq c(\varepsilon) e^{c_2 |s|^{1+\varepsilon}}. \quad (6.30)$$



**证明** 令  $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ , 取  $n \in \mathbb{N}$  使得  $\sigma \leq n \leq n+1$ , 则有

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{\sigma} dt \leq \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n! \leq n^n = e^{n \ln n} \leq e^{(\sigma+1) \ln(\sigma+1)}, \quad (6.31)$$

根据余元公式, 以及  $\Gamma$  函数的级数表示可得

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \Gamma(1-s) \frac{\sin \pi s}{\pi} \quad (6.32)$$

$$= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-s)} \right) \frac{\sin \pi s}{\pi} + \left( \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-s} dt \right) \frac{\sin \pi s}{\pi} \quad (6.33)$$

根据 Euler 公式有  $|\sin \pi s| \leq e^{\pi |s|}$ , 由此后一部分有

$$|\text{part2}| \leq c e^{(|s|+1) \ln(|s|+1)} e^{\pi |s|} \sim c_1 e^{c_s |s| \ln |s|} \quad (6.34)$$

只需考虑前一部分, 若  $|\operatorname{Im}(s)| > 1$ , 则直接放缩可知其被  $ce^{\pi|s|}$  控制; 若  $|\operatorname{Im}(s)| \leq 1$ , 则取整数  $k$  使得  $k - 1/2 \leq \operatorname{Re}(s) < k + 1/2$ , 当  $k \geq 1$  时, 由于

$$\text{part1} = (-1)^{k-1} \frac{\sin \pi s}{(k-1)!(k-1)\pi} + \sum_{n \neq k-1} (-1)^n \frac{\sin \pi s}{n!(n+1-s)\pi} \quad (6.35)$$

其中第一部分有界 (因为  $s = k$  为  $\sin \pi s$  的零点, 与极点相消), 第二部分也有界 ( $1/(n+1-s)$  的分母不会为 0, 因此可放缩为常数, 而  $\sin \pi s$  有界, 因此整体被  $c \sum_{1/n!} \sim ce$  控制).

若  $k \leq 0$ , 则根据定义有  $\operatorname{Re}(s) < 1/2$ , 同样可用  $ce$  控制  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1-s)\pi}$ , 得证.

既然得到了  $1/\Gamma$  的阶, 其也为整函数, 因此根据 Hadamard 定理可用给出如下表示.

### 定理 6.3

对任意  $s \in \mathbb{C}$  有

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}, \quad (6.36)$$

其中  $\gamma$  为 Euler 常数, 定义为

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N. \quad (6.37)$$

**证明** 由于  $\Gamma$  的阶为 1, 因此根据 Hadamard 分解定理有

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{As+B} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}, \quad (6.38)$$

由于  $\operatorname{Res}(\Gamma, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = 1$ , 因此  $B = 0$ . 由于  $\Gamma(1) = 1$ , 因此有

$$e^{-A} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} \quad (6.39)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} (N+1)e^{-H_N} \quad (6.40)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\ln N - H_N} \quad (6.41)$$

$$= e^{-\gamma}, \quad (6.42)$$

其中  $H_N$  表示调和级数的前  $N$  项和. 因此  $A = \Gamma + 2\pi ik$ , 由于当  $s \in \mathbb{R}$  时  $1/\Gamma \in \mathbb{R}$ , 因此  $k = 0$ , 得证.

综上, 可以总结一下 Gamma 函数的两个重要特征:

1. 在且仅在  $s = 0, -1, -2, \dots$  处有简单极点, 并且无零点.
2. 具有  $\leq 1$  的阶.

并且根据留数公式,  $\sin \pi s$  也具有类似性质, 不过正弦函数有更强的界  $O(e^{c|s|})$ ,  $\Gamma$  函数则不然.

### 命题 6.3

1. 对任意  $c > 0$ ,  $1/|\Gamma(s)| \neq O(e^{c|s|})$ .
2. 不存在整函数  $F(s) = O(e^{c|s|})$ , 且仅有零点  $s = 0, -1, -2, \dots$ .

**证明** 设  $k \in \mathbb{N}$ , 取  $s = -k - 1/2$  则

$$\frac{1}{|\Gamma(s)|} = \Gamma(k+3/2) \left| \frac{\sin \pi(-k-1/2)}{\pi} \right| \quad (6.43)$$

$$= \frac{k! \sqrt{\pi}}{\pi} \quad (6.44)$$

$$\geq \frac{k!}{\pi} \quad (6.45)$$

故  $1/|\Gamma|$  不能被  $e^{c|s|}$  控制.

若存在  $F(s)$  满足上述条件, 则其与  $1/\Gamma$  仅相差一个  $e^{Az+B}$  倍, 由此可得  $1/|\Gamma(s)| = O(e^{c|s|})$ , 与上述结果

矛盾.

## 6.2 Zeta 函数

### 定义 6.2 (Zeta 函数)

对任意  $s > 1$ , 定义 Riemann Zeta 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (6.46)$$

与 Gamma 函数类似, 首先考虑 Zeta 函数的延拓.

### 命题 6.4

Zeta 函数可以自然解析延拓到  $\operatorname{Re}(s) > 1$  上.

**证明** 设  $s = \sigma + it$ , 则  $|n^{-s}| = |e^{-s \log n}| = e^{-\sigma \log n} = n^{-\sigma}$ , 因此

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \quad (6.47)$$

当  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$  时, 上式一致收敛, 因此  $\zeta(s)$  为一个全纯函数的一致极限, 得证. Zeta 函数的进一步延拓要更复杂些, 首先考虑 theta 函数与 xi 函数.

### 定义 6.3 (theta 函数)

对任意  $t > 0$ , 定义 theta 函数为

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}. \quad (6.48)$$

若令  $f(x) = e^{-\pi t x}$ , 则  $\hat{f}(\xi) = t^{-1/2} e^{-\pi \xi^2 / t}$ , 借助 Poisson 求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n), \quad (6.49)$$

可得

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = t^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 / t} = t^{-1/2} \vartheta(1/t) \quad (6.50)$$

由此可知

$$\vartheta(t) \leq C t^{-1/2}, \quad t \rightarrow 0, \quad (6.51)$$

$$|\vartheta(t) - 1| \leq C e^{-\pi t}, \quad t \geq 1. \quad (6.52)$$

后式是由于

$$\vartheta(t) - 1 = 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \leq 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n t} \leq C e^{-\pi t} \quad (6.53)$$

下述定理给出了  $\zeta, \Gamma, \vartheta$  三者之间的联系.

### 定理 6.4

若  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , 则

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} [\vartheta(u) - 1] du. \quad (6.54)$$

**证明** 注意到若令  $u = t/(\pi n^2)$ , 则

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1} du = (\pi n^2)^{-s/2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s/2-1} dt = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) n^{-s}, \quad (6.55)$$

而

$$\frac{\vartheta(u) - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}, \quad (6.56)$$

根据  $|\vartheta - 1|$  的估计可知其一致收敛, 由此积分与求和可以交换顺序, 将上面的过程汇总如下

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} [\vartheta(u) - 1] du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} e^{-\pi n^2 u} du \quad (6.57)$$

$$= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (6.58)$$

$$= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (6.59)$$

通过将 Zeta 函数作一些改变, 可以得到 **xi 函数**.

#### 定义 6.4 (xi 函数)

对任意  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , 定义

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} [\vartheta(u) - 1] du. \quad (6.60)$$

#### 定理 6.5

xi 函数在  $\operatorname{re}(s) > 1$  区域内全纯, 且可以延拓为全平面上的亚纯函数, 具有简单零点  $s = 0, 1$ , 并且对任意  $s \in \mathbb{C}$  有

$$\xi(s) = \xi(1 - s). \quad (6.61)$$

**证明** 证明思路是借助  $\vartheta$  的性质:

$$\vartheta(u) = u^{-1/2} \vartheta(1/u), \quad (6.62)$$

若令  $\psi(u) = [\vartheta(u) - 1]/2$ , 则  $\vartheta(u) = 2\psi(u) + 1$ , 由上述结论可得

$$\psi(u) = u^{-1/2} \vartheta(1/u)/2 - \frac{1}{2} = u^{-1/2} \psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2}, \quad (6.63)$$

因此

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (6.64)$$

$$= \int_0^{\infty} u^{s/2-1} \psi(u) du \quad (6.65)$$

$$= \int_0^1 u^{s/2-1} \psi(u) du + \int_1^{\infty} u^{s/2-1} \psi(u) du \quad (6.66)$$

$$= \int_0^1 u^{s/2-1} \left[ u^{-1/2} \psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2} \right] du + \int_1^{\infty} u^{s/2-1} \psi(u) du \quad (6.67)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (u^{s/2-3/2} - u^{s/2-1}) du + \int_0^1 u^{s/2-3/2} \psi(1/u) du + \int_1^{\infty} u^{s/2-1} \psi(u) du \quad (6.68)$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty} [u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}] \psi(u) du \quad (6.69)$$

根据  $\psi(u)$  很强的衰减性, 右边的积分实际上定义了一个整函数, 因此  $\xi$  在  $s = 0, 1$  处有简单零点, 对称性是易得的.

根据上面的结果, 可以立即得到 Zeta 函数的延拓.

**定理 6.6**

Zeta 函数可以延拓为全平面的亚纯函数, 具有唯一的简单极点  $s = 1$ .



**证明** xi 函数的定义实际上给出了一个亚纯延拓

$$\zeta(s) = \pi^{s/2} \frac{\xi(s)}{\Gamma(s/2)}, \quad (6.70)$$

由于  $1/\Gamma(s/2)$  为整函数, 具有简单零点  $0, -2, -4, \dots$ , 因此与  $\xi$  的极点  $s = 0$  相消, 故  $\zeta$  唯一极点为  $s = 1$ .

**命题 6.5**

存在一列整函数  $\{\delta_n(s)\}$  满足  $|\delta_n(s)| \leq |s|/n^{\sigma+1}$ , 其中  $s = \sigma + it$ , 使得

$$\sum_{1 \leq n < N} \frac{1}{n^s} - \int_1^N \frac{dx}{x^s} = \sum_{1 \leq n < N} \delta_n(s). \quad (6.71)$$

