



复分析笔记

作者：吕浩哲 (Lucas Shen)

时间：July 15, 2025

封面：<https://www.pixiv.net/artworks/100631860>

悟已往之不谏，知来者之可追。——陶渊明

目录

第 1 章 Cauchy 积分理论	1
1.1 Cauchy-Goursat 定理	1
1.1.1 Goursat 定理	1
1.1.2 折线逼近法	1
1.1.3 同伦	1
1.1.4 圆盘上的 Cauchy 定理	1
第 2 章 Weierstrass 级数理论	2
2.1 复无穷级数	2
2.1.1 数项级数与函数项级数	2
2.1.2 全纯函数项级数	3
2.2 复幂级数与 Taylor 展开	4
2.2.1 复幂级数	4
2.2.2 Taylor 展开	5
2.3 解析延拓	7
2.3.1 幂级数的解析延拓	7
2.3.2 Schwarz 对称原理	9
2.3.3 单值性定理	10
第 3 章 Laurent 展开与亚纯函数	12
3.1 Laurent 级数	12
3.2 奇点与亚纯函数	13
3.2.1 整函数与亚纯函数	15
3.3 留数定理	16
3.3.1 辐角原理与 Rouché 定理	17
3.3.2 Rouché 定理的推论	18
3.3.3 留数定理的计算实例	19
3.4 因子分解定理	22
第 4 章 几何理论	24
4.1 Möbius 变换	24
4.1.1 Möbius 变换的几何特性	24
4.1.2 齐次坐标与射影变换群	26
4.1.3 单位圆盘的自同构	27
4.2 Riemann 映照定理	28
4.3 初等函数的几何特征	31
4.3.1 指数函数	31
4.3.2 Zhukovskii 函数	32
4.3.3 三角函数	32
第 5 章 补充内容	34
5.1 面积原理	34

第 1 章 Cauchy 积分理论

1.1 Cauchy-Goursat 定理

本节主要讨论两种引入 Cauchy 定理的思路：史济怀《复变函数》中采用的折线逼近以及 Stein 的 *Complex Analysis* 中引入的同伦概念.

1.1.1 Goursat 定理

1.1.2 折线逼近法

1.1.3 同伦

1.1.4 圆盘上的 Cauchy 定理

第2章 Weierstrass 级数理论

2.1 复无穷级数

复级数是连接数学分析与复分析的桥梁之一，许多无穷级数理论可以推广到复数域。

2.1.1 数项级数与函数项级数

类似实数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \quad (2.1)$$

为复数项级数，它可以看作部分和复数列 S_n 的极限，当该极限存在（且为 S ）时称级数和为 S （或收敛到 S ）。

命题 2.1

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n), \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ 均收敛。

定理 2.1 (Cauchy 收敛原理)

复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛当且仅当

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} |S_m - S_n| = 0, \quad (2.2)$$

也即对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N 使得对任意 $n > N, p \in \mathbb{N}$ 有

$$|z_n + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

定义 2.1 (绝对收敛/条件收敛)

对于收敛的复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ，若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$ ，则称其绝对收敛，否则称之条件收敛。

函数项级数的基本定义也是类似的，这里同样有一致收敛这一重要概念。

定义 2.2 (一致收敛)

称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在域 Ω 上一致收敛到 $S(z)$ ，若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |S_n(z) - S(z)| = 0. \quad (2.4)$$

特别地，若级数在任意紧集 $K \subset \Omega$ 中一致收敛，则称其在 Ω 中内闭一致收敛。

定理 2.2 (Cauchy 收敛原理)

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在域 Ω 上一致收敛当且仅当

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |S_m(z) - S_n(z)| = 0. \quad (2.5)$$

关于一致收敛也有许多判别法，它们都可以从实数的情形推广而来，其中最便利的当属 Weierstrass 判别法

定理 2.3 (Weirestrass 判别法)

设 $\{f_n(z)\}$ 为 Ω 上的函数列, 若存在正项数列 a_n 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\sup_{z \in \Omega} |f_n(z)| \leq a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \quad (2.6)$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 中一致收敛.



一致收敛性总是能带来许多惊喜, 总的来说就是使得极限算子之间可以更自由地换序.

定理 2.4

设 $\{f_n(z)\}$ 为 Ω 上的连续函数列, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 上一致收敛到 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 Ω 上连续.

**定理 2.5**

设 $\{f_n(z)\}$ 为 Ω 上的连续函数列, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在曲线 $\gamma \subset \Omega$ 上一致收敛到 $f(x)$, 则

$$\int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (2.7)$$



对于求导的交换性, 我们聚焦于复分析中最重要的函数: 全纯函数项级数.

2.1.2 全纯函数项级数**定理 2.6 (Weirestrass)**

设 $\{f_n(z)\}$ 为域 D 上的全纯函数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$, 则 f 也在 D 上全纯, 且对任意 $k \in \mathbb{N}$ 有内闭一致极限

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z). \quad (2.8)$$



证明 只需证明 f 在任意 $B(z_0, r) \subset D$ 中全纯, 取简单闭曲线 $\gamma \subset D$, 根据级数的一致收敛性有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0, \quad (2.9)$$

根据 Morera 定理可知 f 在 $B(z_0, r)$ 中全纯.

对于后一条论述, 只需证明一阶导数的情形成立即可 (因为全纯函数是无穷可导的), 设紧集 $K \subset \Omega$, 且 $d(K, \partial\Omega) = d_0 > 0$, $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$, 则对任意 $z \in K$, 取圆盘 $B_r(z) \subset \Omega$, 这里 $r = d_0/2$, 则有

$$\left| \sum_{n=1}^N f'_n(z) - f'(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z)} \frac{\sum_{n=1}^N f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \quad (2.10)$$

$$\leq \frac{1}{r} \sup_{\zeta \in C_r(z)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta) - f(\zeta) \right| \quad (2.11)$$

$$\leq \frac{1}{r} \sup_{\zeta \in K} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta) - f(\zeta) \right|, \quad (2.12)$$

借助一致收敛性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可取 N_0 充分大使得对任意 $N > N_0$ 有

$$\sup_{\zeta \in K} \left| \sum_{n=1}^N f_n(\zeta) - f(\zeta) \right| < r\varepsilon, \quad (2.13)$$

根据 K 的任意性, 导函数的内闭一致收敛得证.

由此也可以看出全纯函数性质的良好性, 我们不再需要像 $\mathbb{R}$ 中的情形一样验证过多的条件.

 **笔记** 实分析中的 Lebesgue 控制收敛定理给出了更强大的交换条件: 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 且存在 Lebesgue 可积函数 g 可以一致控制 f_n , 即 $|f_n(z)| \leq g(z)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f. \quad (2.14)$$

由于复分析中大多情形至少会有逐点收敛, 再加上闭区间上 Riemann 可积必定 Lebesgue 可积且两积分相等, 因此复分析中也可以使用控制收敛定理.

2.2 复幂级数与 Taylor 展开

2.2.1 复幂级数

复幂级数形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots, \quad (2.15)$$

这里 $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, 通过平移, 很多时候可以不妨设 $z_0 = 0$. 幂级数最重要的属性就是收敛半径, 这对于复幂级数亦然, 甚至在 $\mathbb{C}$ 中这一概念更为形象. 与实数相同, 若幂级数在某个 $z_0 \neq 0$ 处绝对收敛, 则它在所有 $|z| \leq |z_0|$ 处均内闭绝对一致收敛 (借助几何级数、Weierstrass 判别法控制), 利用这一点可以定义收敛半径.

定义 2.3 (收敛半径)

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 若存在 $0 \leq R \leq \infty$ 使得对任意 $|z| < R$ 幂级数绝对收敛, 对任意 $|z| > R$ 幂级数发散, 则称 R 为该幂级数的收敛半径, $D_R(0) = \{z : |z| < R\}$ 称为幂级数的收敛圆盘.

收敛半径值同样由 Hadamard 等式给出.

定理 2.7 (Hadamard 等式)

若借用记号 $1/0 = \infty, 1/\infty = 0$, 则所有幂级数均存在收敛半径, 它由 Hadamard 等式给出

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (2.16)$$

证明 首先考虑 $0 < R < \infty$ 的情形 (R 由 Hadamard 等式给出), 假设 $r < R$, 则

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}, \quad (2.17)$$

因此存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时就有

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1-\varepsilon}{r}, \quad |a_n| r^n < (1-\varepsilon)^n \quad (2.18)$$

与几何级数比较可知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ 收敛, 得证.

假设 $r > R$, 则仿照上面的过程, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 就有

$$\frac{1+\varepsilon}{r} < |a_n|^{1/n}, \quad (1+\varepsilon)^n < |a_n| r^n \quad (2.19)$$

同样与几何级数比较可知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ 发散, 得证.

除了这些熟悉的概念, 幂级数也具有非常良好的解析性质, 由于幂级数在其收敛圆中内闭绝对一致收敛, 因此它实际上可以看作多项式的一致极限, 根据 Weierstrass 控制收敛定理可知幂级数实际上是收敛圆内的全纯函数, 且可以逐项求导, 即下述定理.

定理 2.8

幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 定义出了收敛圆盘内的全纯函数, 它的导函数也是一个幂级数, 表示为

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (2.20)$$

并且与 f 有相同的收敛半径.



证明 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, 因此根据上极限的运算可知上面两个幂级数的收敛半径是相同的, 设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, 下证 $g(z) = f'(z)$. 设 f 给出的幂级数的部分和为 S_N , 余项为 E_N , 即 $f = S_N + E_N$, 则

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) = \left(\frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right) \quad (2.21)$$

$$+ (S'_N(z_0) - g(z_0)) + \left(\frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right) \quad (2.22)$$

取定 $|z_0|, |z_0 + h| < r < R$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取定 N 使得

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| + \left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n \sum (z_0 + h)^k z_0^{n-k} \right| \quad (2.23)$$

$$\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^n \quad (2.24)$$

$$< \varepsilon/2, \quad (2.25)$$

对于上述 N , 存在 $\delta > 0$, 当 $|h| < \delta$ 时有

$$\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \varepsilon/2, \quad (2.26)$$

对于这样的 δ 有

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \right| < \varepsilon, \quad (2.27)$$

命题得证.

反过来, 全纯函数是否可以在全纯点附近展开为幂级数? 答案是肯定的, 并且根据在局部作幂级数展开的性质, 可以定义**解析性**

定义 2.4 (解析函数)

称定义在开集 Ω 上的函数 f 是解析的, 若对于任意 $z_0 \in \Omega$, 存在以 z_0 为中心的幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.28)$$

并且其有正收敛半径.



下面来讨论全纯函数的 Taylor 展开.

2.2.2 Taylor 展开

由于 $\mathbb{C}$ 中同样存在幂级数, 因此可以考虑全纯函数是否可以展开为幂级数? 答案是肯定的, 并且这一事实直接给出了许多全纯函数的优良性质, 比如无穷可微性.

定理 2.9

若 $f \in H(B_r(z_0))$, 则 f 在圆盘 $B_r(z_0)$ 中可以唯一展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (2.29)$$

称之为 f 在 z_0 附近的 Taylor 级数.



证明 设 $D = B_{r'}(z_0)$, $0 < r' < r$, 则 f 在 D 中全纯, 由 Cauchy 积分公式可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (2.30)$$

此时 $|\zeta - z_0| = r'$, 因此对任意 $z \in D$ 有 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, 因此可以展开为

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \quad (2.31)$$

且该级数绝对一致收敛, 将其代入积分式, 并交换积分与求和次序可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \quad (2.32)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n \quad (2.33)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (2.34)$$

反过来, 设 f 在局部有级数展开, 则直接计算可得 $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

推论 2.1

函数 f 在域 Ω 全纯当且仅当其在 Ω 中解析.



借助 Taylor 展开, 可以定义高阶零点的概念.

定义 2.5 (高阶零点)

若 f 在 z_0 处全纯且 Taylor 展开不恒为 0, 则存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$f(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0, \quad (2.35)$$

此时称 z_0 为 f 的 m 阶零点.

**命题 2.2**

z_0 为 f 的 m 阶零点当且仅当 f 在 z_0 的领域中可以表示为

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad (2.36)$$

这里 g 在 z_0 全纯且 $g(z_0) \neq 0$.



事实上, 有时零点对函数性质有巨大的影响, 比如当零点很多且充分聚集时可以得到如下唯一性定理

定理 2.10 (唯一性定理)

设 $f \in H(D)$, 且存在一个有极限点的序列 $\{z_n\} \subset D$ 使得 $f(z_n) = 0$, 则 f 在 D 中恒为零.



证明分为两步, 首先证明在命题在 Ω 的某个圆盘中成立, 然后再推广到整个 Ω .

证明 设点列 $\{w_k\} \subset \Omega$, z_0 为 $\{w_k\}$ 的一个极限点, $D \subset \Omega$ 为以 z_0 为圆心的圆盘, 考虑 f 在 D 中的幂级数展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.37)$$

若 f 在 D 不全为 0, 则存在最小的正整数 m , 使得

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m(1 + g(z - z_0)) \quad (2.38)$$

这里 $g(0) = 0$, 取 $\{w_n\}$ 中收敛到 z_0 的子列 (不妨设为它本身), 则 $a_m(w_k - z_0)^m \neq 0$, 并且存在充分大的 k 使得 $1 + g(w_k - z_0) \neq 0$, 这与 $f(w_k) = 0$ 矛盾, 故 f 在 D 上恒为 0.

下面向 Ω 上推广, 设

$$U = \text{Int}\{z \in \Omega : f(z) = 0\}, \quad (2.39)$$

则显然 f 为非空开集 (因为 $z_0 \in U$), 但同时 U 也为闭集 (极限点封闭), 令 V 为 U 在 Ω 中的补集, 则 $\Omega = U \cup V$, 其中 U, V 无交, 且均同时为开集、闭集, 这与 Ω 的连通性矛盾, 故 $V = \emptyset, U = \Omega$, 得证.

对于全纯函数 f, F 分别定义在 $\Omega \subset \Omega'$ 上, 若对任意 $z \in \Omega$ 都有 $f(z) = F(z)$, 那么 F 就称为 f 到 Ω' 的**解析延拓**, 并且上面的事实说明, 这种解析延拓的结果是唯一的. 从这种角度看, 可以借助幂级数将初等函数延拓到复平面上, 比如最经典的

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (2.40)$$

2.3 解析延拓

本节将讨论: 区域 D 内的解析函数能否延拓为更大区域 G 上的解析函数?

定义 2.6 (解析元素)

设 D 为区域, $f \in H(D)$, 则 (f, D) 称为一个解析元素.



易知, 若区域 $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, 并且 $(f_1, D_1), (f_2, D_2)$ 为两个解析元素, $f_1|_{D_1 \cap D_2} = f_2|_{D_1 \cap D_2}$, 则可以定义 $D_1 \cup D_2$ 上的解析函数

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2, \end{cases} \quad (2.41)$$

也就是说 f_1, f_2 均可以**直接解析延拓**, 记为 $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$, 事实上这并不是一个等价关系, 因为它不满足传递性, 考虑下例.

例 2.1 设 $D_1 = B(1, 1), D_2 = B(\omega, 1), D_3 = B(\omega^2, 1)$, 这里 $\omega = e^{2\pi i/3}$ 为三次单位根, 设 f_1, f_2, f_3 均为 $\sqrt{z}$, 分别取单值分支使得 $f_1(1) = 1, f_2(\omega) = e^{\pi i/3}, f_3(\omega^2) = e^{2\pi i/3}$, 则 (f_i, D_i) 为三个解析元素, 显然有

$$(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2), (f_2, D_2) \sim (f_3, D_3), \quad (2.42)$$

但是 $(f_1, D_1) \not\sim (f_3, D_3)$, 这是因为在 $D_1 \cap D_3$ 中有 $f_3 = -f_1$.

但是当 $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ 时, 直接解析延拓可以传递.

引理 2.1

若 D_1, D_2, D_3 为圆盘, $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, $f_i \in H(D_i)$ 满足 $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2), (f_2, D_2) \sim (f_3, D_3)$, 则 $(f_1, D_1) \sim (f_3, D_3)$.



证明 记 $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$, 则 $f_1|_D = f_2|_D = f_3|_D, D \subset D_1 \cap D_3$, 因此根据唯一性定理可知 $f_1|_{D_1 \cap D_3} = f_3|_{D_1 \cap D_3}$, 故 $(f_1, D_1) \sim (f_3, D_3)$.

2.3.1 幂级数的解析延拓

借助幂级数进行延拓是很常用的方法, 在前面讨论 Taylor 展开时也提到过一点点思想. 由于幂级数在收敛圆盘内闭一致收敛, 因此我们将关心它在收敛圆周上的性态.

定义 2.7 (正则点/奇异点)

设 $f(z)$ 在圆盘 D 中解析, 对于 $\zeta \in \partial D$, 若存在圆盘 $V = B(\zeta)$ 以及其上的解析函数 g 使得 $(f, D) \sim (g, V)$, 则 ζ 称为 f 的正则点, ∂D 上的非正则点称为奇异点.



根据定义, 可以有一些基本的观察

1. 正则点集为 ∂D 上的相对开集, 因此奇异点集为闭集.
2. 幂级数的奇异点必定分布在收敛圆周上.
3. f, f' 有相同的正则点与奇异点.
4. 正则/奇异性与该点的敛散性无关, 但是与该点的非切向极限有关 (或者说, 幂级数在收敛圆周上未必连续, 因此极限与取值无关).

正则点给了我们延拓的机会, 但很多情况下并不随人意.

定理 2.11

幂级数的收敛圆周上至少有一个奇异点.



证明 假设幂级数 $f(z)$ 的收敛圆周 $D = B_r(z_0)$ 上每一点都是正则点, 则每一点处的解析元素给出了 ∂D 的覆盖, 取有限覆盖

$$\partial D \subset \bigcup_{k=1}^n B_{r_k}(z_k), \quad (2.43)$$

若 $B_{r_k}(z_k) \cap B_{r_l}(z_l) \neq \emptyset$, 则 $B_{r_k} \cap B_{r_l} \cap D \neq \emptyset$, 由上一节的引理可知 $(g_k, B_{r_k}) \sim (f, D)$, 因此存在比 D 略大的同心圆盘使得 f 在其中解析, 这与 f 的收敛半径为 r 矛盾.

事实上, 存在一个幂级数, 其收敛圆周上无正则点.

例 2.2 设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \quad (2.44)$$

则显然其收敛半径 $R = 1$, 为说明任意 $|z| = 1$ 均为 f 的奇异点, 只需证明稠密集 $E = \{e^{2\pi i p/q} : p, q \in \mathbb{Z}\}$ 中的点均为奇异点即可, 任取 $\zeta_1 = e^{2\pi i p/q} \in E$, 则

$$f(r\zeta_1) = \sum_{n=1}^{q-1} (r\zeta_1)^{n!} + \sum_{n=p}^{\infty} r^{n!}, \quad (2.45)$$

设 $\varphi(r) = \sum_{n=p}^{\infty} r^{n!}$, 假设 $\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(r) = M < \infty$, 则对任意 N 有

$$\sum_{n=p}^N r^{n!} \leq \sum_{n=p}^{\infty} r^{n!} = \varphi(r) < M, \quad (2.46)$$

令左边 $r \rightarrow 1^-$ 即得 $N - p \leq M$, 根据 N 的任意性可知 $M = \infty$, 矛盾, 故 $\varphi(r)$ 在 1 处的左极限发散, 故

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |f(r\zeta_1)| = \infty, \quad (2.47)$$

即 ζ_1 为奇异点.

定义 2.8 (全纯域)

设 $f \in H(D)$, 若 f 不能解析延拓到 D 外, 则称 D 为 f 的全纯域, ∂D 为 f 的自然边界.



2.3.2 Schwarz 对称原理

引理 2.2 (Painleve)

设 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 为域 D 中的可求长曲线, 若 f 在 D 中连续, 在 $D - \bigcup_{k=1}^n \gamma_k$ 中全纯, 则 f 在 D 上全纯.



证明 任取圆盘 $B_r(a) \subset D$, 只需证明 f 在 $B_r(a)$ 中全纯即可, 若 $C_r(a)$ 与某个 γ_k 相交, 则 f 沿 $C_r(a)$ 的积分可以分解为经过这些曲线的一部分的积分, f 在分解后的每个积分区域内部都全纯, 故总的积分为 0, 根据 Morera 定理即得 f 在 $B_r(a)$ 全纯.

借助上述引理, 可以得到一类非常简单的延拓: 对称延拓

定理 2.12 (Schwarz 对称原理)

设域 D 关于 $\mathbb{R}$ 对称, 若 f 在 $D \cap \mathbb{H}$ 全纯, 在 $D \cap \overline{\mathbb{H}}$ 连续, 并且 $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, 则

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cap \mathbb{H} \\ f(\bar{z}), & z \in D \cap (-\mathbb{H}) \end{cases} \quad (2.48)$$

就是 f 在 D 中的解析延拓.



证明 容易验证 F 在 D 除去 $\mathbb{R}$ 的部分全纯, 根据 Painleve 原理可知 F 在 D 中全纯.

直线有对称, 圆周也有对称, 因此 Schwarz 原理可以推广到圆周上. 下面定理的陈述中, $\mathbb{C}_\infty^+(\gamma), \mathbb{C}_\infty^-(\gamma)$ 表示被圆周 γ 分成的 $\mathbb{C}_\infty$ 的两部分.

定理 2.13 (推广 Schwarz 对称原理)

设域 D 关于 $\gamma = C_r(z_0)$ 对称, 若 f 在 $D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma)$ 全纯, 在 $D \cap (\mathbb{C}_\infty^+(\gamma) \cap \gamma)$ 连续, 并且 $f(D \cap \gamma) \subset \Gamma = C_\rho(w_0)$, 且对任意 $z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma), f(z) \neq w_0$, 则 f 可以解析延拓为

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cap (\mathbb{C}_\infty^+ \cup \gamma) \\ w_0 + \frac{\rho^2}{f(z_0 + \frac{r^2}{z-a}) - w_0}, & z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^-(\gamma) \end{cases} \quad (2.49)$$



借助 Schwarz 对称原理, 可以讨论圆环的双全纯等价问题.

命题 2.3

圆环 $D = \{r_1 < |z| < r_2\}, G = \{R_1 < |z| < R_2\}$ 双全纯等价的充要条件是

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.50)$$

并且将 D 映为 G 的双全纯映射必定为

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{R_2}{r_2} z \text{ 或 } f(z) = e^{i\theta} \frac{r_1 R_2}{z}. \quad (2.51)$$



证明 设双全纯映射 f 将 D 映为 G , 则其必定将 D 的边界映为 G 的边界, 若 $f(C_{r_1}) = C_{R_1}, f(C_{r_2}) = C_{R_2}$, 则考虑圆环

$$D_1 = \left\{ \frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1 \right\}, \quad G_1 = \left\{ \frac{R_1^2}{R_2} < |z| < R_1 \right\}, \quad (2.52)$$

它们分别与 D, G 关于 C_{r_1}, C_{R_1} 对称, 因此 f 可以延拓到 $\overline{D} \cup D_1$ 上, 将其映为 $\overline{G} \cup G_1$, 这种延拓可以重复进行, 最终延拓为 B_{r_2} 到 B_{R_2} 的双全纯映射, 且 $f(0) = 0$, 根据 Schwarz 引理可断定 $f(z) = e^{i\theta} \frac{R_2}{r_2} z$, 而该映射也是 B_{r_1} 到 B_{R_1} 的双全纯映射, 故 $f(z) = e^{i\theta} \frac{R_1}{r_1} z$, 即得

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.53)$$

此外, 若 $f(C_{r_1}) = C_{R_2}, f(C_{r_2}) = C_{R_1}$, 则映射 $g(z) = 1/z$ 将 D 映为 $D' = \{\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}\}$, 此时 $f \circ g$ 就是上一种情形的映射, 因此

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = e^{i\theta} \frac{R_2}{\frac{1}{r_1}} z \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} \frac{r_1 R_2}{z}, \quad (2.54)$$

同理可得 $r_1 R_2 = r_2 R_1$, 即 $r_2/r_1 = R_2/R_1$.

2.3.3 单值性定理

定义 2.9 (沿曲线延拓)

若 (f_0, D_0) 为一个解析元素, D_0 为圆盘, γ 为连接 a, b 的曲线, 若存在分割 $0 = t_0 < \cdots < t_{n+1} = 1$ 即圆盘 $D_1, \cdots, D_n$ 使得

$$D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset, \quad \gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset D_k, \quad (2.55)$$

以及存在解析元素 $(f_k, D_k) \sim (f_{k+1}, D_{k+1})$, 则称 (f_0, D_0) 可以沿曲线 γ 解析延拓到 b . 

沿曲线解析延拓实际上就是通过圆盘靠近 b , 但是直接解析延拓并不满足传递性, 因此一个自然的问题就是沿同一曲线, 选择不同的分割、圆盘得到的延拓结果是否唯一? 沿不同曲线的延拓结果是否唯一? 首先考虑如下引理.

引理 2.3

设 $(f_0, D_0) \sim (g_0, G_0)$, 且二者分别沿曲线 γ 延拓到 $(f_n, D_n), (g_m, G_m)$, 则 $(f_n, D_n) \sim (g_m, G_m)$. 

证明 可不妨设二者均以分割 $0 = t_0 < \cdots < t_{n+1} = 1$ 延拓 (否则将两个分割归并即可), 且 $m = n$, 根据相交三圆盘的传递引理有

$$\gamma(t_1) \in G_0 \cap D_0 \cap D_1, (g_0, G_0) \sim (f_0, D_1) \sim (f_1, D_1) \Rightarrow (f_1, D_1) \sim (g_0, G_0), \quad (2.56)$$

$$\gamma(t_1) \in D_1 \cap G_0 \cap G_1, (f_1, D_1) \sim (g_0, G_0) \sim (g_1, G_1) \Rightarrow (f_1, D_1) \sim (g_1, G_1), \quad (2.57)$$

以此类推即得 $(f_n, D_n) \sim (g_n, G_n)$.

这就说明沿同一曲线的延拓是相同的, 下面主要讨论后一问题, 首先引入一个拓扑概念.

定义 2.10 (同伦)

设 γ_0, γ_1 为域 D 内连接 a, b 的两条曲线, 若存在连续映射 $\phi(t, s) : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ 满足

$$\phi(t, 0) = \phi_0(t) = \gamma_0(t), \quad \phi(t, 1) = \phi_1(t) = \gamma_1(t), \quad (2.58)$$

$$\phi(0, s) = a, \quad \phi(1, s) = b, \quad (2.59)$$

则称 γ_0, γ_1 在 Ω 内同伦. 

注 容易验证同伦是等价关系.

同伦的几何意义就是将曲线 γ_0 连续变化为 γ_1 , 并且始终保持起点与终点不变, 过程中的任意时刻, $\phi(t, s) = \gamma_s(t)$ 也是一条曲线 (可以想象橡皮筋).

定理 2.14 (单值性定理)

设 (f_0, D_0) 为解析元素且能在 Ω 内任意解析延拓, $a \in D_0 \subset \Omega$, γ_0, γ_1 为 Ω 内连接 a, b 的两条同伦曲线, 记 (f_{s,n_s}, D_{s,n_s}) 为 (f_0, D_0) 沿 γ_s 解析延拓到 b 的解析元素, 则

$$(f_{0,n_0}, D_{0,n_0}) \sim (f_{1,n_1}, D_{1,n_1}). \quad (2.60) \quad \text{img alt="orange heart icon" data-bbox="880 845 895 860"/>$$

证明 对于固定的 $s \in [0, 1]$, 存在圆盘 $D_{s,0}, \cdots, D_{s,n_s}$ 覆盖 γ_s 且相邻有交, 令 $G_s = \bigcup_{k=0}^{n_s} D_{s,k}$, 并且

$$\varepsilon = d(\partial G_s, \gamma_s) > 0, \quad (2.61)$$

根据 ϕ 的一致连续性, 存在 δ , 当 $|s - s'| < \delta$ 时有

$$|\gamma_s(t) - \gamma_{s'}(t)| < \varepsilon, \quad (2.62)$$

也就是说对任意 $s' \in (s - \delta, s + \delta) \cap [0, 1]$, G_s 同样覆盖 $\gamma_{s'}$, 因此 (f_{s, n_s}, D_{s, n_s}) 也可以看作是沿 γ_s 的延拓, 故 $(f_{s, n_s}, D_{s, n_s}) \sim (f_{s', n_{s'}}, D_{s', n_{s'}})$, 这就说明对任意 $s \in [0, 1]$, 存在区间 $\Delta_s = (s - \delta, s + \delta)$, 对任意 $s', s'' \in \Delta_s$ 有

$$(f_{s'', n_{s''}}, D_{s'', n_{s''}}) \sim (f_{s', n_{s'}}, D_{s', n_{s'}}), \quad (2.63)$$

因此 $[0, 1]$ 可取有限覆盖 $\Delta_{s_1}, \dots, \Delta_{s_N}$, 得到 $[0, 1]$ 的分割 $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = 1$, 使得

$$(f_{0, n_0}, D_{0, n_0}) \sim (f_{s_1, n_{s_1}}, D_{s_1, n_{s_1}}) \sim \dots \sim (f_{1, n_1}, D_{1, n_1}), \quad (2.64)$$

得证.

由于单连通区域中任意两条曲线均同伦, 因此可以得到推论

推论 2.2

设 Ω 为单连通区域, (f_0, D_0) 为解析元素且能在 Ω 内任意解析延拓, $a \in D_0 \subset \Omega$, 则存在 Ω 内的单值解析函数 f , 使得 $f|_{D_0} = f_0$.



证明 对任意 $b \in \Omega$, 用曲线 γ 连接 a, b , 设 (f_0, D_0) 沿 γ 解析延拓到 (f_n, D_n) , $b \in D_n$, 则可定义 $f(b) = f_n(b)$, 单值性定理保证了这种定义的良好性, 根据 b 的任意性即定义出了 Ω 中的全纯函数 f , 并且显然 $f|_{D_0} = f_0$, 得证.

第3章 Laurent 展开与亚纯函数

3.1 Laurent 级数

前面证明过, 全纯函数在局部可以展开为幂级数, 而对于圆环中的全纯函数, 也可以展开为幂级数的推广: Laurent 级数.

定义 3.1 (Laurent 级数)

称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad (3.1)$$

为 Laurent 级数, 其收敛当且仅当右式两部分 (分别称为全纯部分与主要部分) 均收敛.



Laurent 级数实际上就是将幂级数推广到了“负幂”, 其收敛性取决于后面两部分. 根据幂级数的理论可以得到:

命题 3.1

- 若 Laurent 级数的全纯部分在 $|z| = r$ 收敛, 则其在 $|z| < r$ 收敛.
- 若 Laurent 级数的全纯部分在 $|z| = R$ 收敛, 则其在 $|z| > R$ 收敛.
- 若 Laurent 级数在圆环 $\{z: r < |z| < R\}$ 收敛, 则其在该区域内闭一致收敛, 且和函数全纯.



有了上述结论, 可以给出本节的核心定理

定理 3.1

设 f 为区域 $D = \{z: r < |z-z_0| < R\}$ 中的全纯函数, 则 f 可以展开为 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (3.2)$$

并且这种展开是唯一的.



证明 对任意 $z \in D$, 取 r_1, r_2 使得

$$r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R, \quad (3.3)$$

则根据 Cauchy 积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad (3.4)$$

设 $|f(z)| \leq M < \infty (r_1 < |z| < r_2)$, 则对任意 $\zeta \in C_{r_1}(z_0)$ 有

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}, \quad (3.5)$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}, \quad (3.6)$$

$$\left| \frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \right| \leq \frac{M}{|z-z_0|} \left(\frac{r_1}{|z-z_0|} \right)^{n-1}, \quad (3.7)$$

根据控制收敛定理可以逐项积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^{-n}, \quad (3.8)$$

类似地, 对任意 $\zeta \in C_{r_2}(z_0)$ 有

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (3.9)$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = - \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (3.10)$$

$$\left| \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r_2} \left(\frac{|z - z_0|}{r_2} \right)^n, \quad (3.11)$$

同样根据控制收敛定理有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n, \quad (3.12)$$

再将上面的圆周收缩到 z_0 附近, 即得证. 若 f 还存在另外的展开, 记其系数为 a'_n , 则逐项积分可得

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = \sum_{-\infty}^{\infty} a'_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(z_0)} (\zeta - z_0)^{n-m-1} d\zeta = a'_m. \quad (3.13)$$

3.2 奇点与亚纯函数

定义 3.2 (孤立奇点)

称 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为函数 f 的孤立奇点, 若 f 在 z_0 的一个去心邻域中全纯 (往往在 z_0 处不全纯).



注 类似可定义“孤立奇点集的极限点”为非孤立奇点, 本节大多讨论孤立奇点.

根据 f 在孤立奇点附近的形态, 可以将之分为三类:

- 可去奇点: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq \infty$.
- 极点: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.
- 本性奇点: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在.

其中可去奇点是最平凡的, 我们通过添加定义修补了 f , 下面的定理给出了可去奇点的进一步刻画.

定理 3.2 (Riemann 可去奇点定理)

z_0 为 f 的可去奇点当且仅当 f 在 z_0 附近有界.



证明 可去奇点显然满足局部有界, 反之若 f 在 $\{0 < |z - z_0| < R\}$ 中全纯, 则将其展开可得

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.14)$$

取 $0 < r < R$, 可估计其负幂系数

$$|a_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \right| \quad (3.15)$$

$$\leq M r^n, \quad (3.16)$$

令 $r \rightarrow 0$ 可知 $a_{-n} = 0$, 故 f 只有全纯部分, 显然其在 z_0 处有有限极限.

注意到

$$f(z) \rightarrow \infty \iff \frac{1}{f(z)} \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

因此极点与零点有非常紧密的联系, 容易证明

命题 3.2

z_0 为 f 的极点当且仅当 z_0 为 $1/f$ 的零点.



证明 极限发散是显然的, 根据唯一性定理, 孤立性也是显然的.

仿照零点, 可以定义极点的阶数.

定义 3.3

若 z_0 为 $1/f$ 的 m 阶零点, 则称 z_0 为 f 的 m 阶极点.

推论 3.1

若 z_0 为 f 的 m 阶极点, 则 f 的 Laurent 展开的主要部分只有有限项, 即

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad (3.18)$$

并且其中 $a_{-m} \neq 0$. 换句话说 $(z-z_0)^m f(z)$ 为全纯函数.

最后讨论本性奇点, 它有一些非常神奇的性质.

定理 3.3 (Weierstrass)

设 z_0 为 f 的本性奇点, 则对任意 $A \in \mathbb{C}_{\infty}$, 存在点列 $z_n \rightarrow z_0$ 使得 $f(z_n) \rightarrow A$.

证明 发散子列是显然的, 若对于某个有限的 A 不存在这样的子列, 也就是存在 $\varepsilon_0 > 0, \delta > 0$, 对任意 $|z-z_0| < \delta$ 有

$$|f(z) - A| \geq \varepsilon_0, \quad \frac{1}{|f(z) - A|} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad (3.19)$$

根据 Riemann 可去奇点定理, z_0 为 $g(z) = 1/(f(z) - A)$ 的可去奇点, 若 $g(z) = 0$, 则 z_0 为 $f(z) - A$ 的极点, 矛盾; 若 $g(z) \neq 0$, 则 z_0 为 $f(z) - A$ 的可去奇点, 同样矛盾, 故一开始的假设不成立.

上面的定理表明, z_0 领域的像在扩充复平面是稠密的, 与之类似有如下定理

定理 3.4 (Picard 小定理)

任意非常值整函数的值域或为 $\mathbb{C}$, 或为 $\mathbb{C} - \{z_0\}$.

定理 3.5 (Picard 大定理)

全纯函数在本性奇点的领域内无穷多次取到所有有限复值, 且至多只有一个例外.

上述定理的证明暂略.

如果考虑无穷远点, 也可以讨论其奇性.

定义 3.4 (无穷远奇点)

若 $\zeta = 0$ 为 $g(\zeta) = (1/\zeta)$ 的可去奇点/极点/本性奇点, 则称 $z = \infty$ 为 $f(\zeta)$ 的可去奇点/极点/本性奇点.

若 ∞ 为 f 的孤立奇点, 则 $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ 在原点的邻域 $\{0 < |\zeta| < 1/R\}$ 中有 Laurent 展开

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (3.20)$$

因此 f 在无穷远点的邻域 $\{R < |z| < \infty\}$ 中也有展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n, \quad (3.21)$$

根据前面的结论, 若 ∞ 为 f 的可去奇点 (0 为 g 的可去奇点), 则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 b_n z^n, \quad (3.22)$$

若 ∞ 为 f 的 m 阶极点 (0 为 g 的 m 阶极点), 则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m b_n z^n, \quad (3.23)$$

而当 ∞ 为 f 的本性奇点时, 上面的展开的幂级数部分有无穷多项, 因为是相对于无穷远点, 因此称负幂级数为全纯部分, 正幂级数为主要部分.

推论 3.2

1. 在无穷远处全纯的整函数一定是常数.
2. 若无穷远点为整函数 f 的 m 阶极点, 则 f 是一个 m 阶多项式.

若无穷远点为整函数 f 的本性奇点, 则称 f 为**超越整函数**.

3.2.1 整函数与亚纯函数

前面的章节主要讨论了全纯函数, 但大多情况下函数会存在奇点, 此时则对应了更广的亚纯函数

定义 3.5 (亚纯函数)

若 f 在域 D 除了极点外的部分全纯, 则称 f 为 D 上的亚纯函数.

注 一般不特别说明 D 时, 默认为 $\mathbb{C}$ 中的亚纯函数, 即在 $\mathbb{C}$ 中除极点外无其它奇点的函数.

下面讨论无穷远点的性质对亚纯函数性质的影响.

定理 3.6

若 $z = \infty$ 为亚纯函数 f 的可去奇点或极点, 则 f 为有理函数.

证明 此时存在 R , 使得 f 在 $\{R < |z| < \infty\}$ 中全纯, 且在 $\{|z| \leq R\}$ 中只有有限个极点 (否则与孤立性矛盾), 记为 $p_1, \dots, p_n$, 设 h_j 为 f 在 p_j 处 Laurent 展开的主要部分 (它们都是负幂多项式), 在令 $g(z)$ 为 f 在无穷远点的主要部分, 此时

$$F(z) = f(z) - g(z) - \sum_{k=1}^n h_k(z) \quad (3.24)$$

为 $\mathbb{C}_\infty$ 上的全纯函数, 因此 F 为常数, f 为有理函数.

上面的定理也顺便证明了一个代数的结论: 任何有理函数都能唯一分解成部分分式之和.

作为上述结论的应用, 可以讨论 $\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty$ 的全纯/亚纯自同构群.

定理 3.7

$\text{Aut}(\mathbb{C})$ 由所有一次多项式组成.

证明 设整函数 $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, 若无穷远点为本性奇点, 则对任意 $A \in \mathbb{C}$, 存在发散点列

$$z_n \rightarrow \infty, \quad f(z_n) = w_n \rightarrow A, \quad (3.25)$$

两边取逆可得 $z_n = f^{-1}(w_n) \rightarrow \infty$, 即 A 为 f^{-1} 的极点, 与 $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ 为整函数矛盾, 因此无穷远点只能为 f 的极点 (否则 f 为常值), 即 f 为多项式, 但高于一次的多项式不会是单叶的, 因此 f 为一次多项式.

定理 3.8

$\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 由所有 Mobius 变换组成.

证明 $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 中的函数 f 均为 $\mathbb{C}_\infty$ 中的亚纯函数, 即无穷远点为 f 的可去奇点或极点, f 为有理函数, 根据单叶性 (对任意 $y \in \mathbb{C}_\infty$, 求根反解 x) 可知 f 只能为分式线性函数.

3.3 留数定理

Cauchy 定理表明, 对于圆盘 D 内的全纯函数 f , 其沿其中任意简单闭曲线积分为 0, 而对于去心圆盘中的全纯函数则未必有这样的性质 (比如考虑 $1/z$), 但此时可以作展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.26)$$

对上式逐项积分可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n dz \right] = a_{-1}, \quad (3.27)$$

也就是说亚纯函数在孤立奇点附近圆周的积分只与 Laurent 展开的 a_{-1} 项有关, 因此定义该值为留数.

定义 3.6 (留数)

若 z_0 为 f 的孤立奇点, 则定义 z_0 处的留数为

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(z_0)} f(z) dz. \quad (3.28)$$



注 特别的, 若无穷远点也为孤立奇点, 则存在 $R > 0$ 使得函数在 $\{R < |z| < \infty\}$ 全纯, 因此可定义无穷远点的留数为

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_M(0)} f(z) dz. \quad (3.29)$$

由定义可以看出, 留数大多情况可以根据 Laurent 展开求得, 但对于一些特殊情形, 也有更简便的方法.

命题 3.3

若 a 为 f 的 m 阶极点, 则

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)], \quad (3.30)$$

特别当 $m=1$ 时有

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z). \quad (3.31)$$



证明 此时存在全纯函数 g 满足 $f(z) = g(z)/(z-a)^m$, 由 Cauchy 积分公式可得

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(z_0)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{g(z)}{(z-a)^m} dz \quad (3.32)$$

$$= \frac{g^{(m)}(a)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]. \quad (3.33)$$

定义留数的意义在于将函数的积分转化为求某些点留数的值, 即下面非常重要的留数定理.

定理 3.9 (留数定理)

若 f 在域 U 中除去 $z_1, \dots, z_n$ 全纯, 在 $\bar{U}$ 中除去 $z_1, \dots, z_n$ 连续, ∂U 为简单可求长闭曲线, 则

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (3.34)$$



推论 3.3

若 f 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中除去 $z_1, \dots, z_n, \infty$ 外全纯, 则 f 在这些孤立奇点的留数之和为 0, 即

$$\operatorname{Res}(f, \infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) = 0. \quad (3.35)$$



借助留数定理,可以得到一些非常精彩的结论.

3.3.1 辐角原理与 Rouché 定理

定理 3.10 (辐角原理)

设 f 在域 D 中亚纯, γ 为 D 中的可求长闭曲线, f 在 γ 内的零点为 $a_1, \dots, a_n$, 极点为 $b_1, \dots, b_m$ (均记重数), 则对任意 D 中的全纯函数 φ 有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \varphi(a_k) - \sum_{k=1}^m \varphi(b_k). \quad (3.36)$$



证明 只需分别计算左边在所有零点、极点附近的积分, 设 a 为 f 的 t 阶零点, 则

$$f(z) = (z-a)^t g(z), \quad f'(z) = (z-a)^t g'(z) + t(z-a)^{t-1} g(z), \quad (3.37)$$

其中 g 全纯且 $g(a) \neq 0$, 因此

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(a)} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(a)} \varphi(z) \left[\frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{t}{z-a} \right] dz = t\varphi(a). \quad (3.38)$$

设 b 为 f 的 t 阶极点, 则

$$f(z) = (z-b)^{-t} h(z), \quad f'(z) = (z-b)^{-t} h'(z) - t(z-b)^{-t-1} h(z), \quad (3.39)$$

其中 h 全纯且 $h(b) \neq 0$, 因此

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(b)} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon(b)} \varphi(z) \left[\frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{t}{z-b} \right] dz \quad (3.40)$$

$$= -t\varphi(b). \quad (3.41)$$

若 f 将 γ 映为可求长曲线 Γ , 则令 $w = f(z)$ 有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w}, \quad (3.42)$$

右边式子中的 $\int_{\Gamma} \frac{dw}{w}$ 有很明确的几何含义, 它表示 $w = \Gamma(t) = f(\gamma(t))$ 辐角的变化, 并且 Γ 为闭曲线说明它是 $2\pi i$ 的整数倍, 这个整数被称为绕原点的**卷绕数**, 或者说绕原点的“净圈数”, 可以引入记号

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\Gamma} \text{Log} w = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg w, \quad (3.43)$$

回到辐角原理, 特别当 $\varphi(z) = 1$ 时, 它说明

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (3.44)$$

这里 N, P 分别表示 f 在 γ 内部的零点、极点个数

定理 3.11 (Rouché 定理)

设 f, g 为域 D 中的亚纯函数, γ 为 D 中的可求长简单闭曲线且内部包含在 D 中, 若当 $z \in \gamma$ 时有

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| < \infty, \quad (3.45)$$

则 f, g 在 γ 内部各自的零点、极点数量之差相同.



证明 根据条件可知 f, g 在 γ 上无极点、零点, 令 $\varphi(z) = f(z)/g(z)$, 则

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \frac{|f(z)|}{|g(z)|} + 1 \quad (3.46)$$

说明 $\varphi(\gamma) \subset \mathbb{C} - [0, \infty)$, 因此可取单值分支, 此时

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\log \varphi(z))' dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz \quad (3.47)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{f(z)g(z)} dz \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \quad (3.49)$$

$$= (N_f - P_f) - (N_g - P_g). \quad (3.50)$$

推论 3.4

设 f, g 为域 D 中的亚纯函数, γ 为 D 中的可求长简单闭曲线且内部包含在 D 中, 若当 $z \in \gamma$ 时有

$$|g(z)| < |f(z)| < \infty, \quad (3.51)$$

则 f 与 $f \pm g$ 在 γ 内部各自的零点、极点数量之差相同.



证明 注意到

$$|f(z) - (f(z) \pm g(z))| = |g(z)| < |f(z)| \leq |f(z)| + |f(z) \pm g(z)| < \infty. \quad (3.52)$$

借助 Rouché 定理可以研究解析函数的零点, 它表明对函数 f 添加一个微扰 g 后, 零点与极点的差不变. 首先给出代数基本定理的又一证明.

定理 3.12 (代数基本定理)

n 次复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个根 (记重数).



证明 设 $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_n \neq 0$, 则存在 $R > 0$ 使得对任意 $z \in C_R(0)$ 有

$$\frac{\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|}{R^n + \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right|} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k}{R^n} < 1, \quad (3.53)$$

因此 $f(z)$ 与 $g(z) = a_n z^n$ 在 $C_R(0)$ 中有相同数量的零点 (因为二者无极点), 而后者的零点为 n 重的 0, 得证.

3.3.2 Rouché 定理的推论

借助 Rouché 定理, 可以证明一些结论, 这里例举一二.

定理 3.13 (开映射定理)

设 f 为域 D 上非常数的全纯函数, 则 $f(D)$ 也是域.



证明 先证 $f(D)$ 为开集, 任取 $w_0 = f(z_0) \in f(D)$, 只需证明对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 δ 使得 $B_\delta(w_0) \subset f(B_\varepsilon(z_0))$, 也就是说对任意与 w_0 充分近的 w , w 包含在 f 的像集中 (即存在 z 使得 $f(z) = w$). 令

$$g(z) = f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = F(z) + G(z), \quad (3.54)$$

对任意 $\varepsilon > 0$ (满足 $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$, 并且在边界 C 有 $f(z) \neq w_0$), 取 $\delta > 0$ 使得对任意 $z \in C$ 都有 $|f(z) - w_0| \geq \delta$, 这时只要 $|w - w_0| < \delta$ 就有

$$|F(z)| = |f(z) - w_0| > |w_0 - w| = |G(z)|, \quad (3.55)$$

根据 Rouché 定理可知 g 在 $B_\varepsilon(z_0)$ 中有与 F 相同数量零点, 得证.

另一方面, D 中任何连接 $a, b \in D$ 的曲线 γ , 其像 $f(\gamma)$ 在 $f(D)$ 中连接 $f(a), f(b)$, 故 $f(D)$ 连通, 故为域. 使用同样的手法, 可以证明如下推论

推论 3.5

设 f 为域 D 上的全纯函数, $z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$, 若 z_0 为 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $a \in B(w_0, \delta)$, $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个零点.



定理 3.14 (Hurwitz)

设 $\{f_n\}$ 为域 D 中的全纯函数列, 在 D 中内闭一致收敛到不恒为零的 f , 设 γ 为 D 中的可求长简单闭曲线, 其内部属于 D 且不过 f 的零点, 则必然存在正整数 N , 对任意 $n > N$, f_n, f 在 γ 内部的零点个数相同.



证明 显然 $f(z)$ 全纯, 设 $\inf_{z \in \gamma} \{|f(z)|\} = \varepsilon > 0$, 则存在 N , 对任意 $n > N$ 有 $\|f_n - f\| < \varepsilon$, 因此对任意 $z \in \gamma$ 有

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|, \quad (3.56)$$

根据 Rouché 定理, f, f_n 在 γ 内部有相同数量的零点.

推论 3.6

设 $\{f_n\}$ 为域 D 上的单叶全纯函数列, 在 D 中内闭一致收敛到不恒为常数的 f , 则 f 也在 D 上单叶全纯.



证明 显然 f 全纯, 若 f 不是单叶则存在 $z_1 \neq z_2 \in D, f(z_1) = f(z_2)$, 令 $F(z) = f(z) - f(z_1)$, 则 F 在 D 中有至少两个零点, 取两个小圆周各包含 F 的一个零点, 且不过 F 的零点, 根据 Hurwitz 定理, 存在 N , 对任意 $n > N$, $F_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$ 在两个小圆周内各有一个零点, 这与 f_n 的单叶性矛盾, 故 f 单叶.

最后借助开映射定理证明最大模原理.

定理 3.15 (最大模原理)

设 f 为区域 D 中的非常值全纯函数, 则 f 不能在 Ω 内部取最大值.



证明 假设 f 在 $z_0 \in D^\circ$ 中取到最大值, $D \subset D$ 为以 z_0 为中心的圆盘, 则根据开映射定理可知 $f(D)$ 为包含 $f(z_0)$ 的开集, 这说明某个 $B_r(f(z_0)) \subset f(D)$, 也就是说存在 $z \in D$ 使得 $|f(z)| > |f(z_0)|$, 与 z_0 处的最大性矛盾.

3.3.3 留数定理的计算实例

留数定理的一大应用是计算 $\mathbb{R}$ 中的反常积分, 下面来讨论这一大类问题.

¶ 实直线上的积分**定理 3.16**

设 f 在上半平面 $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ 中除去 $a_1, \dots, a_n$ 外全纯, 在 $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ 中除去 $a_1, \dots, a_n$ 连续, 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k). \quad (3.57)$$



证明 取充分大的 R 使得 $a_1, \dots, a_n \in B_0(R) \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, 记 $\gamma_R = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$, 则由留数定理可得

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k), \quad (3.58)$$

记 $M(R) = \max\{|f(z)| : z \in \gamma_R\}$, 则

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} d\theta \right| \quad (3.59)$$

$$\leq \pi R M(R) \rightarrow 0, \quad (3.60)$$

故令 $R \rightarrow \infty$ 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k). \quad (3.61)$$

推论 3.7

设 P, Q 为既约多项式, $\deg Q - \deg P \geq 2$, Q 无实零点, 在上半平面的零点有 $a_1, \dots, a_n$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a_k\right). \quad (3.62)$$



对于 $e^{iaz}f(z)$ 型函数的积分, 考虑如下引理.

引理 3.1 (Jordan)

设 f 在 $\{R_0 \leq |z| < \infty, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 连续且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则对任意 $a > 0$ 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 0, \quad (3.63)$$

其中 $\gamma_R = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi], R \geq R_0$.



证明 记 $M(R) = \max\{|f(z)| : z \in \gamma_R\}$, 则

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{iaR \cos \theta} e^{-aR \sin \theta} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \right| \quad (3.64)$$

$$\leq RM(R) \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \quad (3.65)$$

$$= 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta \quad (3.66)$$

$$\leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi} aR \theta} d\theta \quad (3.67)$$

$$= \frac{\pi}{2} M(R) (1 - e^{-aR}) \rightarrow 0. \quad (3.68)$$

其中用到了不等式

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad (3.69)$$

定理 3.17

设 f 在上半平面 $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ 中除去 $a_1, \dots, a_n$ 外全纯, 在 $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ 中除去 $a_1, \dots, a_n$ 连续, 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iaz} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(e^{iaz} f(z), a_k). \quad (3.70)$$



证明 取充分大的 R 使得 $a_1, \dots, a_n \in B_0(R) \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, 记 $\gamma_R = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$, 则由留数定理可得

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k), \quad (3.71)$$

根据 Jordan 引理有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 0, \quad (3.72)$$

得证.

分别对上面的结果取实部、虚部, 可以得到 $f(x) \sin ax, f(x) \cos ax$ 型函数的积分, 在此不给出.

引理 3.2

设 f 在扇形区域

$$G = \{a + \rho e^{i\theta} : 0 < \rho \leq \rho_0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \alpha\} \quad (3.73)$$

连续, 若 $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = A$, 则对 $\gamma_\rho = \{a + \rho e^{i\theta} : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \alpha\}$ 有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = iA\alpha. \quad (3.74)$$



证明 令 $g(z) = (z - a)f(z) - A$, 则 $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$, 若记 $M_\rho = \sup\{|g(z)| : z \in \gamma_\rho\}$, 则

$$\left| \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - a} dz \right| = \left| \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} \frac{g(a + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta \right| \quad (3.75)$$

$$\leq M_\rho \alpha \rightarrow 0, \quad (3.76)$$

因此

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = iA\alpha + \int_{\gamma_\rho} \frac{g(z)}{z - a} dz \rightarrow iA\alpha. \quad (3.77)$$

正半轴的积分

两种特殊的积分

最后讨论一类特殊的积分, 它在物理学中有很多应用.

例 3.1 试计算 **Fresnel 积分**

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx, \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx. \quad (3.78)$$

计算思路与前面相同, 考虑函数 $f(z) = e^{iz^2}$ 以及扇形围道

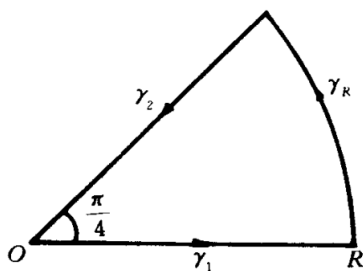


图 3.1: 扇形围道

根据 Cauchy 定理有

$$\int_0^R e^{ix^2} dx = - \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz - \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz, \quad (3.79)$$

其中

$$\int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = i \int_0^{\pi/4} e^{i(R^2 \cos 2\theta + \theta)} e^{-R^2 \sin \theta} d\theta, \quad (3.80)$$

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{4} R e^{-R^2/\sqrt{2}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad (3.81)$$

以及

$$- \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}, \quad (3.82)$$

这里用到了 Gauss 积分, 因此

$$\int_0^\infty e^{iz^2} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i = \int_0^\infty \cos z^2 dz + i \int_0^\infty \sin z^2 dz, \quad (3.83)$$

由此得到

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \quad (3.84)$$

3.4 因子分解定理

给定亚纯函数, 可以得到其极点, 以及其在极点附近 Laurent 展开的主部, 那么反之, 给定一系列 (无极限点的) 极点 $z_1, z_2, \dots$ 以及主部 $P_1(z), P_2(z), \dots$, 是否存在亚纯函数 $f(z)$ 恰好以这些点为极点, 以对应主部为主部? 如果给定一系列零点以及阶数, 是否依然存在对应的整函数?

上述问题的答案都是肯定的, 下面来讨论这些问题.

对于极点的情形, 首先考虑特殊情况, 若 f 在 $\mathbb{C}_\infty$ 全纯, 则其为有理函数, 有理函数的部分分式表示实际上就是将各主部依次求和. 但当这些主部为无穷时直接求和未必收敛, 这时需要考虑添加一些“修正项”.

定理 3.18 (Mittag-Leffler)

设 $z_1, z_2, \dots$ 为一发散点列, 给定部分分式

$$P_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}}{(z - z_k)^j}, \quad (3.85)$$

则存在亚纯函数以 $z_1, z_2, \dots$ 为极点, 且在 z_k 附近的主要部分为 P_k .

证明 不妨设 $z_k \neq 0$ (否则作平移), 则将 P_k 在 0 处作 Taylor 展开得到

$$P_k(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} z^l, \quad (3.86)$$

且其收敛半径为 $r_k = |z_k|$, 令 $h_k = \sum_{l=0}^{N_k} c_{kl} z^l$, 取 $M_k = \max\{|P_k(z)| : |z| = r_k/2\}$, 则当 $z \in B(0, r_k/4)$ 时

$$|P_k(z) - h_k(z)| = \left| \sum_{l=N_k+1}^{\infty} c_{kl} z^l \right| \leq \sum_{l=N_k+1}^{\infty} |c_{kl}| \left(\frac{r_k}{4}\right)^l \quad (3.87)$$

$$\leq \sum_{l=N_k+1}^{\infty} \frac{M_k}{\left(\frac{r_k}{2}\right)^l} \left(\frac{r_k}{4}\right)^l \quad (3.88)$$

$$\leq \frac{M_k}{2^{N_k}}, \quad (3.89)$$

再取 N_k 充分大使得 $M_k/2^{N_k} \leq 1/2^k$, 因此

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |P_n(z) - h_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad (3.90)$$

这说明 $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k(z) - h_k(z))$ 在 $\mathbb{C} - \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ 内闭一致收敛到一个亚纯函数 f , 且在 z_k 处的主部为 P_k . 也就是说, 满足上述条件的亚纯函数有形式

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - h_n(z)) + g(z), \quad (3.91)$$

其中 $g(z)$ 为整函数.

例 3.2 考虑 $f(z) = \cot z = \cos z / \sin z$, 其极点为 $z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 且均为一阶, 且在 $z = n\pi$ 处的主部为 $1/(z - n\pi)$, 对 $n \neq 0$ 处作修正 $1/n\pi$, 则存在全纯函数 g 使得

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right) + g(z), \quad (3.92)$$

实际上, 上面的修正非常完美, 使得 $g(z) = 0$.

下面考虑第二类情形, 即根据零点刻画整函数, 首先考虑一些无穷乘积的性质.

定理 3.19

设 $\{a_k(z)\}$ 在 Ω 中有界, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(z)|$ 一致收敛, 则 $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k(z))$ 在 Ω 上一致收敛到某个 $f(z)$.



证明 此时

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k(z)) \right| \leq e^{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(z)|}, \quad (3.93)$$

故无穷乘积一致收敛.

定理 3.20

设 $f_n(z)$ 为区域 D 上的全纯函数且均不恒为 0, 若 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ 在 D 上内闭一致收敛, 则 $\prod_{k=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 D 上的全纯函数 f , 且若 $f(z_0) = 0$, 则存在有限的 $n_1, \dots, n_k$ 使得 $f_{n_1}(z_0) = \dots = f_{n_k}(z_0) = 0$.



定义因子

$$E_0(z) = 1 - z, \quad E_p(z) = (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}}, \quad (3.94)$$

定理 3.21

设 $\{z_n\}$ 为发散点列, 若自然数列 $\{p_n\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n+1} < \infty, \quad (3.95)$$

则 $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/z_n)$ 为以 z_n 为全部两点的整函数.



定理 3.22 (Weierstrass)

设 f 为整函数, $f(0) \neq 0$, 设 $z_1, z_2, \dots$ 为 f 的全部零点, 则存在整函数 g 以及 $p_1, p_2, \dots$ 使得

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/z_n). \quad (3.96)$$



第4章 几何理论

4.1 Mobius 变换

定义 4.1 (Mobius 变换/分式线性变换)

由函数

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (4.1)$$

给出的 $\mathbb{C}$ 中的变换称为 Mobius 变换.



注 当 $ad - bc = 0$ 时, 上面的 f 将复平面映为常值.

Mobius 变换是复平面上最简单的一类变换, 取一些特殊值可以发现它可以表示四种基本几何变换:

1. 平移变换: $z \mapsto z + a$.
2. 旋转变换: $z \mapsto e^{i\theta}z$.
3. 伸缩变换: $z \mapsto rz (r \neq 0)$.
4. 反演变换: $z \mapsto 1/z$.

反过来, 由于

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}, \quad (4.2)$$

因此任何 Mobius 变换都可以表示为四种变换的复合.

推论 4.1

任何 Mobius 变换都可以表示为平移、旋转、伸缩、反演变换的复合.



正因如此, 对 Mobius 变换的讨论可以归结到对四种基本几何变换的讨论上, 而前三种变换属于非常熟悉的仿射变换, 因此大多只需讨论反演的情形.

4.1.1 Mobius 变换的几何特性

事实上, 直线可以看作圆心在无穷远处的圆周, 在这种观察下, Mobius 变换具有非常好的“保圆性”

命题 4.1

Mobius 变换将圆周映为圆周.



证明 只需证明反演变换将圆周映为圆周, 设有圆周

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0, \quad (4.3)$$

其中 $A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}, |B|^2 - CA > 0$, 则其反演像 $w = 1/z$ 满足

$$Cw\bar{w} + Bz + \bar{B}\bar{z} + A = 0, \quad (4.4)$$

这里 $A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}, |B|^2 - AC > 0$, 也为圆周.

使用同样的手法可以证明

推论 4.2

若 Mobius 变换将圆周 Γ_1 映为 Γ_2 , 则其同时将关于 Γ_1 的一对对称点映为 Γ_2 的一对对称点.



如果考虑单位圆周, 那么复平面上只有 0 没有有限的对称点, 为了解决这一问题, 我们在复平面中添加无

穷远点, 考虑扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$. 作这一扩充后的 Möbius 变换满足

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad f(-\frac{d}{c}) = \infty, \quad (4.5)$$

容易验证:

定理 4.1

Möbius 变换是扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$ 上的双射.

并且很容易求出其逆映射为

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}. \quad (4.6)$$

研究一类几何变换, 一个重要的思想是寻找这一类变换下的不变量, 欧式变换的不变量为角度、长度; 仿射变换的不变量为比例; 而 Möbius 变换的不变量就是**交比**, 考虑如下命题:

引理 4.1

非恒同映射的 Möbius 变换的不动点至多为两个.

证明 设 $f(z) = z$, 解得

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0, \quad (4.7)$$

代数基本定理表明上述方程至多有两个根, 得证.

推论 4.3

任一 Möbius 变换可以由三个点 z_1, z_2, z_3 及其像 w_1, w_2, w_3 唯一确定.

证明 若不然, 假设存在两个满足条件的 Möbius 变换 f_1, f_2 , 则 $f_1^{-1} \circ f_2$ 有三个不动点 z_1, z_2, z_3 , 故 $f_1^{-1} \circ f_2$ 为恒同映射, 即得 $f_1 = f_2$, 矛盾.

上面的定理说明, Möbius 变换可以由 3 个点唯一确定

定义 4.2 (交比)

设 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$, 其中至少三点不相同, 定义其交比为

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}. \quad (4.8)$$

定理 4.2

交比是 Möbius 变换下的不变量.

证明 任取不同的三点 z_2, z_3, z_4 , 则任一 Möbius 变换 f , 由等式

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (g(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \quad (4.9)$$

确定的分式线性变换 g 将 z_k 映为 $f(z_k)$, 根据唯一性定理可知 $g = f$, 因此

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4)), \quad (4.10)$$

即其保持交比.

借助这一结论, 可以很容易得到一些几何中的结论.

例 4.1 四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆当且仅当 $\text{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$.

这四点共圆当且仅当存在分式线性映射 f 将 z_1, z_2, z_3, z_4 映到实轴, 因此

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \in \mathbb{R}, \quad (4.11)$$

即得 $\text{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$.

4.1.2 齐次坐标与射影变换群

从前面的讨论可以看出, Mobius 变换可逆、在复合下封闭, 因此可以从群的角度看待这一类变换. Mobius 变换给出了扩充复平面上的双射, 事实上, 所有的 Mobius 变换组成了 $\mathbb{C}_\infty$ 的自同构群.

定理 4.3

所有的 Mobius 变换构成了亚纯自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$.

证明 若亚纯函数 $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$, 则 ∞ 为 f 的可去奇点或极点, 因此 f 必为有理函数, 根据其单叶性, 分子、分母的分式只能有一个零点 (否则 $0, \infty$ 原像不唯一), 因此

$$f(z) = \frac{(az + b)^m}{(cz + d)^n}, \quad (4.12)$$

对单叶性进一步讨论可知 $m = n = 1$.

进一步, 从矩阵的角度可以给出 Mobius 变换更好的表示. 如果设

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, \quad (4.13)$$

则

$$f_1 \circ f_2 = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}, \quad (4.14)$$

这在形式上恰好与矩阵乘法相同, 即

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

因此每个 Mobius 变换实际上对应于一个 $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ 矩阵, 不过这并不是一一对应, 因为对任意 $\lambda \neq 0$ 有

$$\frac{\lambda z + 0}{0z + \lambda} = z, \quad \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}, \quad (4.16)$$

因此由同态基本定理可得

$$\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty) \cong PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C}) / \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}^*\} \quad (4.17)$$

上面的 $PGL_2(\mathbb{C})$ 称为射影线性群.

定义 4.3 (射影线性群)

定义 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶射影线性群为

$$GL_n(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* I. \quad (4.18)$$

既然得到了变换的矩阵表示, 下一步自然是希望将变换的作用也等同到矩阵的乘法, 观察到

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \sim? \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

因此只要考虑合适的等价关系, f 在 z 上的作用就可以对应矩阵 F 在 $(z, 1)^T$ 上的作用, 由此便引出了齐次坐标的概念

定义 4.4 (齐次坐标)

对任意复数 $z \in \mathbb{C}$, 定义其齐次坐标为 $[z_1, z_2]$, 这里 $z_1/z_2 = z$; 特别地, 定义 ∞ 的齐次坐标为 $[z_1, 0]$, 这里 $z_1 \neq 0$.

注 容易验证, 同一复数的不同齐次坐标表示之间相互等价, 即相差一个常数倍.

从齐次坐标的角度看, 无穷远点也并不特殊, 它只是 $[1, 0]$ 对应的点而已.

4.1.3 单位圆盘的自同构

下面借助 Mobius 变换讨论一个几何上的问题： $\mathbb{C}$ 中单位圆盘的自同构.

问题 4.1 求一 Mobius 变换 f ，将单位圆盘映到自身，且将园内的点 a 映为圆心.

a 关于单位圆的对称点为 $\bar{a}^{-1}$ ，根据 Mobius 变换的保对称性可知

$$f(a) = 0, \quad f(\bar{a}^{-1}) = \infty, \quad (4.20)$$

因此该变换可表示为

$$f(z) = \lambda \frac{z - a}{z - \bar{a}^{-1}} = -\lambda \bar{a} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (4.21)$$

因为 f 将单位圆盘映为自身，故其同时也将单位圆周映为自身，即对任意 $|z| = 1$ 有

$$1 = |f(z)| = |\lambda \bar{a}| \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} \quad (4.22)$$

$$= |\lambda \bar{a}| \frac{|z - a|}{|z| |\bar{z} - \bar{a}|} \quad (4.23)$$

$$= |\lambda \bar{a}|, \quad (4.24)$$

因此取 $\lambda \bar{a} = e^{i\theta}$ ，就有

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \quad (4.25)$$

若记

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \quad (4.26)$$

则满足上述条件的 Mobius 变换就是旋转变换与 ϕ_a 的复合，容易验证

$$\phi_a^{-1}(z) = \phi_a(z), \quad (4.27)$$

或者说这种变换是对合的.

借助 Schwarz 引理可以证明这一事实.

引理 4.2 (Schwarz)

设 f 为 $B(0, 1)$ 中的全纯函数，满足 $f(0) = 0, f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ ，则

1. $|f'(0)| \leq 1$ ，对任意 $z \in B(0, 1)$ 有 $|f(z)| \leq |z|$.
2. 若 $|f'(0)| = 1$ 或存在 $z_0 \in B(0, 1) - \{0\}$ 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$ ，则 f 为旋转变换.



定理 4.4

设 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$ ， $f^{-1}(0) = a$ ，则必定存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(z) = e^{i\theta} \phi_a(z). \quad (4.28)$$



证明 若记 $w = \phi_a(z)$ ，则

$$z = \phi_a^{-1}(w) = \frac{a - w}{1 - \bar{a}w} = \phi_a(w), \quad (4.29)$$

令 $g(w) = f \circ \phi_a^{-1}(w)$ ，则 $g \in \text{Aut}(B(0, 1))$ 且

$$g(0) = f(\phi_a(0)) = f(a) = 0, \quad (4.30)$$

根据 Schwarz 引理有 $|g'(0)| \leq 1$ ，但是 $g^{-1} \in \text{Aut}(B(0, 1))$ ， $g^{-1}(0) = 0$ ，因此根据 Schwarz 引理有

$$|(g^{-1})'(0)| = \frac{1}{|g'(0)|} \leq 1, \quad (4.31)$$

因此必有 $|g'(0)| = 1$ ，根据 Schwarz 引理， g 实际上是一个旋转变换，即

$$f \circ \phi_a^{-1}(w) = e^{i\theta} w, \quad f(z) = e^{i\theta} \phi_a(z), \quad (4.32)$$

得证.

借助 Möbius 变换, 可以给出上半平面与单位圆盘间的双全纯映射.

例 4.2 设 $\mathbb{H}$ 为上半平面, 考虑将 $\mathbb{H}$ 映为 $B(0, 1)$ 的双全纯 Möbius 变换 f . 该映射必然将 $\mathbb{R}$ 映为 $C(0, 1)$, 并且由于 Möbius 变换保对称性, 故同时将 $i, -i$ 映为关于 $C(0, 1)$ 的对称点, 实际上这里可以不妨设 $f(i) = 0, f(-i) = \infty$, 并且 $f(0) = 1$, 则借助交比性质可以直接得到

$$f(z) = \frac{i - z}{i + z}, \quad (4.33)$$

对于一般的双全纯 Möbius 变换, 设其将 i 映为 $a \in B(0, 1)$, 将 0 映为 $e^{i\theta}$, 则只需将 f 与 ϕ_a , 旋转变换复合即可.

Schwarz 引理可以进行推广:

定理 4.5 (Schwarz-Pick)

设 $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 全纯, $a, b = f(a) \in B(0, 1)$, 则

1. 对任意 $z \in B(0, 1)$ 有 $|\phi_b(f(z))| \leq |\phi_a(z)|$.
2. $|f'(a)| \leq \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$.
3. 若存在 $z_0 \in B(0, 1), z_0 \neq a$, 使得 $|\phi_b(f(z_0))| = |\phi_a(z_0)|$ 或 $|f'(a)| = \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$ 成立, 则 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$.



证明

1. 令 $g = \phi_b \circ f \circ \phi_a$, 则 $g \in H(B(0, 1))$ 且 $g(0) = 0$, 根据 Schwarz 引理有

$$|\phi_b \circ f \circ \phi_a(\zeta)| = |g(\zeta)| \leq |\zeta|, \quad (4.34)$$

令 $\zeta = \phi_a(z)$ 即得 $|\phi_b(f(z))| \leq |\phi_a(z)|$.

2. 同样根据 Schwarz 引理可得

$$|(\phi_b \circ f \circ \phi_a)'(0)| = |g'(0)| \leq 1, \quad (4.35)$$

其中

$$(\phi_b \circ f \circ \phi_a)'(0) = \phi_b'(f(\phi_a(0)))f'(\phi_a(0))\phi_a'(0) \quad (4.36)$$

$$= \phi_b'(b)f'(a)\phi_a'(0) \quad (4.37)$$

$$= f'(a) \frac{1-|a|^2}{1-|b|^2}, \quad (4.38)$$

移项得证.

3. 根据 Schwarz 引理, 有任意一条取等当且仅当 $g(z) = e^{i\theta}z$, $f = \phi_b \circ g \circ \phi_a \in \text{Aut}(B(0, 1))$.

4.2 Riemann 映照定理

Riemann 映照定理来源于一个简单的问题: 对 $\mathbb{C}$ 中任意两个区域, 是否存在全纯函数将一者一一映到另一者? 这种关系被称为共形等价.

定义 4.5 (共形等价)

称区域 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ 共形等价, 若存在双射 $f: D_1 \rightarrow D_2$, 满足 f, f^{-1} 均全纯.



下面将证明, 猜想对单连通域是成立的, 并且在加上一些限制后映射是唯一的, 也即

定理 4.6 (Riemann 映照定理)

对任意单连通域 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$, 二者边界均多于一个点, 对任意 $z_0 \in D_1, w_0 \in D_2, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, 存在唯一共形

等价 $f: D_1 \rightarrow D_2$ 使得

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0. \quad (4.39)$$

作为 Schwarz 引理的直接推论, 可以证明 D_1, D_2 均为单位圆盘时定理成立, 借助单位圆盘也可以很容易证明唯一性:

证明 【唯一性】首先证明 D_2 为圆盘时唯一性成立.

设 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ 为域, 边界多余一个点, 再设 f_1, f_2 均为将 D_1 映为 D_2 的双全纯映射, 并对固定的 $z_0 \in D_1, w_0 \in D_2, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ 满足

$$f_i(z_0) = w_0, \quad \arg f'_i(z_0) = \alpha_0, \quad (4.40)$$

当 D_2 为单位圆盘时, $g = f_2 \circ f_1^{-1} \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 且 $g(w_0) = w_0, \arg g'(w_0) = 0$, 设 $\theta_0 = \arg w_0$, 令

$$\phi_{w_0}(z) = e^{i\theta_0/2} \frac{w_0 - z}{1 - \bar{w}_0 z}, \quad (4.41)$$

则 $\phi_{w_0} \circ g \circ \phi_{w_0}^{-1} \in \text{Aut}(B(0, 1)), \phi_{w_0}(g(\phi_{w_0}^{-1}(0))) = 0$, 且在 0 处辐角为 0, 因此由 Schwarz 引理可知

$$\phi_{w_0} \circ g \circ \phi_{w_0}^{-1} = \text{Id} \Rightarrow g = \text{Id}, \quad (4.42)$$

故 $f_1 = f_2$, 同理可知 D_1 为单位圆盘时唯一性成立.

对于一般的 D_1, D_2 , 设 (唯一) g_1, g_2 分别将 D_1, D_2 双全纯映射到 $B(0, 1)$ 且保证

$$g_1(z_0) = 0, g_2(z_0) = 0, \arg g'_1(z_0) = \arg g'_2(z_0) = 0, \quad (4.43)$$

再设 $f: D_1 \rightarrow D_2$ 为满足要求的双全纯映射, 则

$$g_2 \circ f \circ g_1^{-1} \in \text{Aut}(B(0, 1)) \quad (4.44)$$

这里 $g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$ 由 0 处的取值, 0 处导数的辐角唯一确定, 结合 g_1, g_2 的唯一性可知 f 是唯一的. 下面证明存在性 (其中函数列的结论放到后面).

¶ Riemann 映照定理: 存在性

根据对称性, 可不妨设 $D_2 = B(0, 1)$, 我们的证明思路如下:

1. 首先考虑特殊情况: 若 $D_1 \subseteq B(0, 1)$ 且包含原点, 则可以将其“共形拉伸”.
2. 上一步重复进行, 最终可以将其共形到单位圆盘.
3. 对于一般区域 $D_1 \subset \mathbb{C}$, 首先可以将其共形到有界区域 (并附加收缩使之包含在 $B(0, 1)$ 中), 则根据前面的讨论, 存在性得证.

第一步考虑由 Koebe 给出的如下命题:

命题 4.2 (Koebe)

设 D 为单位圆盘, $0 \in \Omega \subsetneq D$ 为单连通域, 假定对 Ω 上任意处处非零的解析函数 f , 可取单值分支 $g = \sqrt{f}$, 则存在 $\tau \in H(\Omega)$ 使得

1. $\tau(0) = 0, \tau(\Omega) \subset D$.
2. $\tau: \Omega \rightarrow D$ 单叶解析.
3. 对任意 $z \in \Omega - \{0\}$ 有 $|\tau(z)| > |z|$.

注 这里的 τ 实际上就是一个保持在 D 中的“共形拉伸”.

证明

取 $a \in D - \Omega$, 考虑 D 的自同构 ($\phi_a(a) = 0, \phi_a(0) = a$)

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \quad (4.45)$$

根据单叶性, ϕ_a 在 Ω 上处处非零, 因此可取单值分支 $g = \sqrt{\phi_a}$, 记 $g = \xi \circ \phi_a$, $b = g(0) = \xi(a)$, 再考虑 D 的自同构

$$\phi_b(\eta) = \frac{b - \eta}{1 - \bar{b}\eta}, \quad (4.46)$$

下证 $\tau = \phi_b \circ g = \phi_b \circ \xi \circ \phi_a$ 满足条件.

记 $\Omega' = \tau(\Omega) \subset D$, 则显然 τ 单叶解析, 进而 τ^{-1} 单叶解析, 而

$$\tau^{-1} = g^{-1} \circ \phi_b^{-1}, \quad g^{-1}(\eta) = \phi_a^{-1} \circ \xi^{-1}(\eta) = \frac{a - \eta^2}{1 - \bar{a}\eta^2}, \quad (4.47)$$

这里 g^{-1}, τ^{-1} 可视为 D 上解析函数 G, H (对应相同表达式) 在 $g(\Omega), \Omega'$ 上的限制, 由于 $H(0) = 0, H(D) \subset D$ 且 H 不为旋转, 根据 Schwarz 引理, 对任意 $\xi \in B(0, 1)$ 有 $|H(\xi)| < |\xi|$, 令 $\xi = \tau(z)$ 即得 $|z| < |\tau(z)|$.

下面进行后面两步

定理 4.7

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 为区域, 设对 Ω 上任意一个处处非零的解析函数 f , 可取单值分支 $g = \sqrt{f}$, 则 Ω 与 $B(0, 1)$ 全纯等价.



注 注意到单连通域中可以定义根号的单值分支 (平移使之不包含原点即可), 因此 Riemann 映照定理的存在性得证.

证明 【STEP 1. 证明 Ω 可共形等价到有界区域】

取 $a \in \mathbb{C} - \Omega$, 则在 Ω 上可取单值分支 $g(z) = \sqrt{z - a}$, 它在 Ω 上单叶, 且 $g(\Omega) \cap (-g(\Omega)) = \emptyset$, 取 $B_r(w_0) \subset g(\Omega)$, 则 $B_r(-w_0) \cap g(\Omega) = \emptyset$, 也即对任意 $z \in \Omega$ 有

$$|g(z) + w_0| > r, \quad (4.48)$$

此时 $h(z) = 1/(g(z) + w_0)$ 在 Ω 上单叶解析且 $|h(z)| < 1/r$, 这里 $h: \Omega \rightarrow h(\Omega)$ 给出了一个到有界集的共形等价, 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 则

$$h_0(z) = \varepsilon(h(z) - h(z_0)) \quad (4.49)$$

将 Ω 双全纯等价到 $B(0, 1)$ 中包含原点的有界区域.

【STEP 2. 记 $h_0(\Omega) = \Omega_0$, 下证 Ω_0 与 $B(0, 1)$ 共形等价】

记 $\mathcal{F}$ 为 Ω_0 上满足如下条件的单叶解析函数族:

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(\Omega_0) \subset B(0, 1), \end{cases} \quad (4.50)$$

取 $z_1 \in \Omega_0$, 令 $\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z_1)| \in (0, 1)$, 断言:

1. 存在 $F \in \mathcal{F}$, $|F(z_1)| = \alpha$.
2. $F(\Omega_0) = B(0, 1)$.

取函数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(z_1)| = \alpha$, 则由 Montel 定理知存在子列内闭一致收敛到 Ω_0 上的解析函数 F , 并且 $F(0) = 0, |F(z_1)| = \alpha > 0$, 即 F 不为常值, 说明 F 在 Ω_0 上单叶解析, 且根据收敛性易得

$$F(\Omega_0) \subset \overline{B(0, 1)}, \quad (4.51)$$

但同时 $F(\Omega_0) \subset B(0, 1)$ 为开集 (开映射定理), 即 $F \in \mathcal{F}$, 记 $\Omega_1 = F(\Omega_0)$, 若 $\Omega_1 \neq B(0, 1)$, 则由 Koebe 定理, 存在 Ω_1 上的单叶解析函数 τ 使得

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(\Omega_1) \subset B(0, 1) \Rightarrow \tau \in \mathcal{F}, \quad (4.52)$$

而 $|\tau(z)| > |z|$, 令 $f = \tau \circ F \in \mathcal{F}$ 可知 $|f(z_0)| > |F(z_1)| = \alpha$, 与极大性矛盾, 故 $F(\Omega_0) = \Omega_1 = B(0, 1)$.

函数列的结论

定义 4.6 (一致有界)

设 $\mathcal{F}$ 为域 D 上的函数族, 若存在 $M < \infty$, 对任意 $z \in D, f \in \mathcal{F}$ 都有 $|f(z)| \leq M$, 则称 $\mathcal{F}$ 在 D 中一致有界; 若 $\mathcal{F}$ 在任意紧集 $K \subset D$ 一致有界 $M(K)$, 则称 $\mathcal{F}$ 内闭一致有界.



定义 4.7 (一致等度连续)

设 $\mathcal{F}$ 为域 D 上的函数族, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $z_1, z_2 \in D, |z_1 - z_2| < \delta, f \in \mathcal{F}$ 都有

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \quad (4.53)$$

则称 $\mathcal{F}$ 在 D 中 (一致) 等度连续; 若 $\mathcal{F}$ 在任意紧集 $K \subset D$ 中一致等度连续, 则称 $\mathcal{F}$ 在 D 中内闭等度连续.



定理 4.8 (Arzela-Ascoli)

设域 D 上的函数列 $\{f_n\}$ 内闭一致有界且内闭等度连续, 则其存在子列在 D 中内闭一致收敛.



借助 A-A 定理, 可以证明如下定理

定理 4.9 (Montel)

若域 D 上的解析函数列 $\{f_n\}$ 内闭一致有界, 则必有子列内闭一致收敛.



证明 根据 Arzela-Ascoli 定理, 只需证明 $\{f_n\}$ 内闭等度连续, 取紧集 $K \subset D$, 设 $\{f_n\}$ 在 K 中有上界 M , 则对任意 $\overline{B_r(z_0)} \subset K$, 任意 $z_1, z_2 \in B_{r/2}(z_0)$ 有

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_1} dz - \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_2} dz \right| \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z_1 - z_2)f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz \right| \quad (4.55)$$

$$\leq \frac{M}{2\pi} |z_1 - z_2| \frac{2\pi r}{r^2/4} \quad (4.56)$$

$$= \frac{4M}{r} |z_1 - z_2|, \quad (4.57)$$

设 $\Omega \subset D$ 为紧集, 则 $\bigcup_{z \in \Omega} B_{r_z}(z) \subset D$ 覆盖 Ω , 取有限子覆盖 $B_{r_1}(z_1), \dots, B_{r_m}(z_m)$, 令 r_* 为其中最小者,

$$\delta = \min \left\{ \frac{r_*}{4}, \frac{\varepsilon r_*}{4M} \right\}, \quad M = \max \{M(B_1), \dots, M(B_m)\}, \quad (4.58)$$

则对任意 $z, w \in \Omega, |z - w| < \delta$ 有

$$|f_n(z) - f_n(w)| \leq \frac{4M}{r_*} |z_1 - z_2| < \varepsilon, \quad (4.59)$$

得证.

4.3 初等函数的几何特征

4.3.1 指数函数

$\mathbb{C}$ 中的指数函数可以借助 Euler 公式或级数定义, 注意到 $e^{z_1} = e^{z_2}$ 当且仅当 $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, 因此 $f(z) = e^z$ 的单叶性域为

$$D_k = \{2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\}, \quad (4.60)$$

也就是一个高度为 2π 的水平条带. 在单叶性域中, 设 $z = x_0 + iy$, 则

$$e^z = e^{x_0}(\cos y + i \sin y), \quad (4.61)$$

若 $z = x + iy_0$ 则

$$e^z = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0), \quad (4.62)$$

也就是说 $f(z) = e^z$ 将平行于 x 轴的直线映为经过原点的直线, 将平行于 y 轴的直线映为以原点为圆心的圆周, 它将单叶性域 D_0 映为 $\mathbb{C} - [0, +\infty)$, 如果考虑 $\{-\pi < \operatorname{Im} y < \pi\}$, 则 e^z 将其映为 $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

4.3.2 Zhukovskii 函数

$\mathbb{C}$ 上的 Zhukovskii 函数定义为

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (4.63)$$

它可以看作 $\mathbb{C}_\infty$ 上的映射, 将 $0, \infty$ 都映为 ∞ . 注意到 $f(z_1) = f(z_2)$ 当且仅当

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0, \quad (4.64)$$

因此只要域 D 内不存在关于单位圆周的对称点, 则 D 就是 $f(z)$ 的单叶性域, 由此立即得到 $B(0, 1)$ 或 $\overline{B(0, 1)}^C$ 就是两个单叶性域, 上半平面与下半平面亦然. 下面讨论这些单叶性域在 f 下的像.

设 $z = re^{i\theta}$, $w = f(z) = u + iv$, 则

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta, \quad (4.65)$$

如果固定 $r = r_0 \neq 1$, 则 f 将圆周 $C_r(0)$ 映为一个椭圆, 其 x, y 方向的轴长分别为

$$a = r_0 + \frac{1}{r_0}, \quad b = \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|, \quad (4.66)$$

并且所有圆周都有 x 轴上的公焦点, 焦距 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, 当 $0 < r_0 < 1$ 时, 上半圆周被映为下半椭圆, 下半圆周被映为上半椭圆; 而当 $r > 1$ 时情况相反; 当 $r = 1$ 时椭圆退化为线段 $[0, 1]$.

如果固定 $\theta = \theta_0$, 则

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta_0, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta_0, \quad (4.67)$$

也即

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta_0} = 1, \quad (4.68)$$

因此 f 将经过原点的直线映为以 $(\pm 1, 0)$ 为焦点的双曲线.

上面的结果说明, f 将 $B(0, 1)$ 映为 $\mathbb{C} - [-1, 1]$, 将 $\overline{B(0, 1)}^C$ 映为

对于上半平面与下半平面的讨论是类似的, 它将 $\mathbb{H}, i\mathbb{H}$ 均映为 $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.

4.3.3 三角函数

$\mathbb{C}$ 中三角函数是根据 Euler 公式反过来定义并自然延拓的 (或者也可以看作由级数定义), 即

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (4.69)$$

容易验证它们满足 $\mathbb{R}$ 中三角函数的一些等式, 但是需要注意, $\mathbb{C}$ 中的正、余弦函数是无界的.

下面讨论余弦函数的单叶性域, 它可以看作三个函数的复合:

$$f_1(z) = iz, f_2(z) = e^z, f_3(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow \cos z = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z), \quad (4.70)$$

1. f_1 将竖直线带 $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ 旋转为水平条带 $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.
2. f_2 再将其映为上半平面 $\mathbb{H}$.
3. 最后 f_3 将上半平面映为 $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.

同理可得, 正弦函数将 $\{(k - 1/2)\pi < \operatorname{Re} z < (k + 1/2)\pi\}$ 映为 $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.

根据正余弦函数的定义, 可以自然定义正余切函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}. \quad (4.71)$$

其中 $\tan z$ 在去掉所有 $z = (k + 1/2)\pi$ 的复平面上全纯, $\cot z$ 在去掉所有 $k\pi$ 的复平面上全纯. 类似可以讨论二者的单叶性域, 正切函数可以看作四个函数的复合:

$$f_1(z) = 2iz, f_2(z) = e^z, f_3(z) = \frac{z-1}{z+1}, f_4(z) = -iz \Rightarrow \tan z = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z), \quad (4.72)$$

1. f_1 将 $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ 伸扭为 $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.
2. f_2 将其映为 $\mathbb{C}_\infty - [0, +\infty]$.
3. f_3 又将该单连通区域映为 $\mathbb{C}_\infty - [-1, 1]$.
4. 最后 f_4 将其旋转为 $\mathbb{C}_\infty - [-i, i]$.

类似可得 $\cot z$ 将 $\{-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ 映为 $\mathbb{C}_\infty - [-i, i]$.

第5章 补充内容

5.1 面积原理

¶ 曲线内部的面积

引理 5.1

设 γ 为正向可求长简单闭曲线, 则 γ 内部面积为

$$S = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz. \quad (5.1)$$



证明 设 γ 内部为区域 D , 直接计算可得

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} x dy + y dx + \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} d(x^2 + y^2) + \iint_D dx dy \quad (5.4)$$

$$= S. \quad (5.5)$$

引理 5.2

设 γ 为可求长曲线, φ 在 γ 上全纯, $\Gamma = \varphi(\gamma)$, 则 Γ 也为可求长曲线, 且对于 Γ 上的连续函数 f 有

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz. \quad (5.6)$$



根据上面两条引理, 可以得到曲线的像围成的面积公式.

推论 5.1

设单叶全纯函数 f 将可求长简单闭曲线 γ 映为正向简单闭曲线 Γ , 则 Γ 内部面积为

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz. \quad (5.7)$$



证明 设 $w = f(z)$, 则

$$S = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w dw = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz. \quad (5.8)$$

借助全纯函数的幂级数展开, 可以得到更精细的结论.

推论 5.2

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 将 $B(0, R)$ 一一映为域 G , 则 G 的面积为 $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}$.



证明 根据边界对应原理, G 就是由 $f(C(0, 1))$ 围成的区域, 因此

$$S = \frac{1}{2i} \int_{C(0, 1)} \overline{f(z)} f'(z) dz \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{C(0, 1)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m z^{m-1} \right) dz \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n R^n e^{-in\theta} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m R^m e^{im\theta} \right) d\theta \quad (5.11)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n} d\theta \quad (5.12)$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}. \quad (5.13)$$

全纯函数有 Taylor 展开, 而亚纯函数有 Laurent 展开, 因此可以证明类似的定理.

推论 5.3

设 $0 < r < R < \infty$, $D = \{r < |z| < R\}$, 若 $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 将 D 双全纯映为域 G , 则 G 的面积为

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}). \quad (5.14)$$



证明 同上.

借助上面的结论, 可以证明 Gronwall 给出的面积原理.

引理 5.3 (面积原理)

若 $f(z) = z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 为 $B(0, 1) - \{0\}$ 上的单叶全纯函数, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1. \quad (5.15)$$



证明 设 $g(z) = f(1/z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ 为 $B(\infty, 1)$ 上的单叶全纯函数, 设其将圆周 C_r ($r > 1$) 映为 Γ_r , 并设其内部区域为 Ω_r , 则

$$S(\Omega_r) = \frac{1}{2i} \int_{C_r} \overline{g(z)} g'(z) dz \quad (5.16)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(r e^{-i\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m r^{-m} e^{-m\theta} \right) \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^{-n-1} e^{-i(n+1)\theta} \right) i r e^{i\theta} d\theta \quad (5.17)$$

$$= \pi r^2 - \pi \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 r^{-2n}, \quad (5.18)$$

而该面积是非负的, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 r^{-2n} \leq r^2, \quad (5.19)$$

因此对任意 N 都有 $\sum_{n=0}^N n |a_n|^2 r^{-2n} \leq r^2$, 先令 $r \rightarrow 1^+$, 再令 $n \rightarrow \infty$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1. \quad (5.20)$$

根据面积原理可得对这种函数有 $|a_1| \leq 1$, 并且当 $a_1 = 1$ 时必有 $a_2 = a_3 = \cdots = 0$, 此时

$$g(z) = z + a_0 + \frac{e^{i\theta}}{z}, \quad f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + e^{i\theta} z. \quad (5.21)$$

借助面积原理, 可以研究单位圆上的 S 类函数.

§S 类函数

对于单位圆上的全纯函数作一些规范化要求, 可以定义 S 类函数.

定义 5.1 (S 类函数)

称单位圆 $B(0, 1)$ 上满足 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 的单叶全纯函数为 S 类函数.



根据定义, 可以得到 S 类函数在 0 处的 Taylor 展开为

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (5.22)$$

容易验证, S 类函数在一些变换下具有不变性.

命题 5.1

设 f 为 S 类函数, 则它在经过如下变换后仍然为 S 类函数:

1. 共轭: $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$.
2. 旋转伸缩: $g(z) = a^{-1}f(az)$.
3. $g(z) = \frac{wf(z)}{w - \overline{f(z)}}$, 其中 $w \in \mathbb{C} - f(B(0, 1))$.
4. $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$, 这里根号取定了单值分支.



还有另一类单叶函数称为 Σ 类函数, 它在单位圆外有 Laurent 展开

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (5.23)$$

它满足限制条件 $g(\infty) = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} g(z)/z = 1$, 事实上, 若 f 为 S 类函数, 则 $(f(z^{-1}))^{-1}$ 为 Σ 类函数.

定理 5.1 (Bieberbach)

设 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 为 S 类函数, 则 $|a_2| \leq 2$, 并且该估计是最优的.



注 以此为基础, Bieberbach 猜想有 $|a_n| \leq n$, 这一猜想于 1984 年被 Louis de Branges 证明.

证明 考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z^2)}{z^2} = 1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots, \quad (5.24)$$

f 单叶说明 g 在 $B(0, 1)$ 中无零点, 取 $\sqrt{g(z)}$ 的单值分支使得 $\sqrt{g(0)} = 1$, 则

$$h(z) = z\sqrt{g(z)} = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots} = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \cdots \quad (5.25)$$

也为 S 类函数, 因此

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2} z^2 + \cdots} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{a_2}{2} z^2 + \cdots \right) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2} z + \cdots \quad (5.26)$$

为 $B(0, 1) - \{0\}$ 上的单叶全纯函数, 由面积原理可得 $|a_2|^2/4 \leq 1$, 即 $|a_2| \leq 2$. 等号成立当且仅当 $a_3 = a_4 = \cdots = 0$, 因此

$$h(z) = z\sqrt{1 + 2e^{i\theta} z^2} = z + 2e^{i\theta} z^3 + 3e^{2i\theta} z^5 + \cdots, \quad (5.27)$$

$f(z^2) = zh(z)$ 说明

$$f(z) = z + 2e^{i\theta} z^2 + 3e^{2i\theta} z^3 + \cdots = e^{-i\theta} K(e^{i\theta} z), \quad (5.28)$$

这里 K 为 Koebe 函数

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots, \quad (5.29)$$

其中 $a_n = n$.

在上述定理的基础上, 可以给出两个推论.

推论 5.4 (Koebe $\frac{1}{4}$ 掩盖定理)

设 f 为 S 类函数, 则 $f(B(0,1)) \supset B(0,1/4)$, 且 $1/4$ 为最优的半径.



证明 只需证明对任意 $w \notin f(B(0,1))$, 必有 $|w| \geq 1/4$ 即可, 设 $g(z) = wf(z)/(w - f(z))$, 则 g 单叶且

$$g(z) = \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right) \left(1 + \frac{1}{w} \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right) + \cdots \right) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w} \right) z^2 + \cdots, \quad (5.30)$$

故 g 为 S 类函数, 由 Bieberbach 定理可知

$$\frac{1}{|w|} \leq \left| a_2 + \frac{1}{w} \right| + |a_2| \leq 4 \Rightarrow |w| \geq \frac{1}{4}. \quad (5.31)$$

从上面的过程可以看出, 若 f 为奇函数, 则结论可改进为 $f(B(0,1)) \supset B(0,1/2)$.

推论 5.5 (偏差定理)

设 f 为 S 类函数, 则对任意 $z \in B(0,1)$ 有

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \quad (5.32)$$



证明 考虑函数

$$g(w) = \frac{f\left(\frac{w+z}{1+\bar{z}w}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}, \quad (5.33)$$

则 g 单叶, 且 $g(0) = 0, g'(0) = 1$, 故 g 为 S 类函数, 计算可得

$$g''(0) = (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}, \quad (5.34)$$

Bieberbach 定理说明 $|g''(0)| \leq 4$, 因此

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \quad (5.35)$$

设 $z = re^{i\theta}$ 则

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = re^{i\theta} \frac{f''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \log f'(z) = r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(z) \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|, \quad (5.36)$$

因此

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}, \quad (5.37)$$

两边对 r 从 0 到 $|z|$ 积分, 结合 $f'(0) = 1$ 可得

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \quad (5.38)$$

由于 $f(0) = 0$, 因此沿 0 到 z 的线段积分估计即得

$$|f(z)| = \left| \int_0^z f'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_0^{|z|} \frac{1+r}{(1-r)^3} dr = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad (5.39)$$

$$|f(z)| = \left| \int_0^z f'(\zeta) d\zeta \right| \geq \int_0^{|z|} \frac{1-r}{(1+r)^3} dr = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}. \quad (5.40)$$